

Шифрин Б.М.Кировоградская летная академия
Национального авиационного университета,
г. Кировоград, Украина
E-mail: b_shifrin@mail.ru**ТРЕНИЕ НА ПНЕВМОКОЛЕСЕ:
СПЕЦИАЛЬНОЕ БУКСИРУЕМОЕ
ПНЕВМОКОЛЕСО**

УДК 629.735.015:533.6.013.43

С помощью известных математических маломерных моделей решена прямая задача динамики для катящегося пневмоколеса. Ограничиваемся малыми углами увода и нулевым углом развала, а зоной скольжения в пятне контакта шины с опорной плоскостью пренебрегаем; находим поперечную силу трения и восстанавливающий момент. Используем модель М. В. Келдыша, а также ее упрощенную версию для жестких пневматиков и модели установившегося увода.

Ключевые слова: трение, пневмоколесо, М. В. Келдыш, угол увода.

1. Введение

Отсутствие общепринятой развитой модели трения на пневмоколесах заметно снижает роль математического моделирования в решении актуальных задач динамики автомобилей, самолетов при взлетах и посадках, скутеров и других пневмоколесных машин. При докритических углах увода требуемая модель должна учитывать адгезию и скольжение в пятне контакта шины с опорной поверхностью. С наибольшей полнотой трение на пневмоколесе изучено, когда углы увода малы настолько, что зона скольжения пренебрежима или, говоря иначе, реализуется квазиадгезионный контакт [1, 2]. В процессе построения требуемой модели для анализа ее работы при малых углах увода понадобятся некие «эталонные» решения квазиадгезионного контакта. Одной из наиболее полных, последовательных и удачных моделей этого класса является модель М. В. Келдыша [1 - 5]. В настоящей статье, продолжая начатое в [5] рассмотрение частных случаев модели М. В. Келдыша, выделен случай специального буксируемого пневмоколеса. Показано, что решение для упомянутого случая обладает рядом особенностей и его целесообразно использовать в качестве «эталонного». Кроме того, в статье проведено сопоставление ряда моделей квазиадгезионного контакта.

2. Постановка задачи

Рассмотрим движение буксируемого пневмоколеса, имеющего вынос назад L (рис. 1). Точка C – его центр масс. Оси $O_g X_g Y_g$ неподвижны и лежат в опорной плоскости. Считаем, что силы трения, возникающие на пневмоколесе, приводятся к силе F и моменту M вокруг оси, перпендикулярной рисунку и проходящей через точку C (рис. 1). Силу F дальше называем *поперечная сила*, а момент M , как это принято в механике шин, – *восстанавливающий момент*.

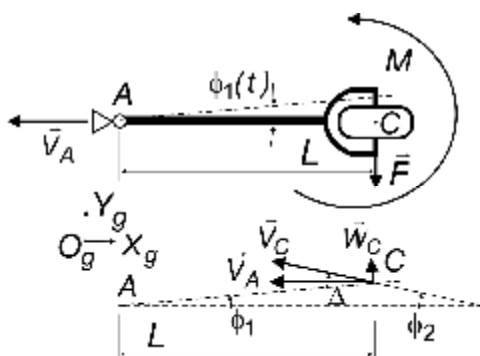


Рис. 1 – Буксируемое пневмоколесо

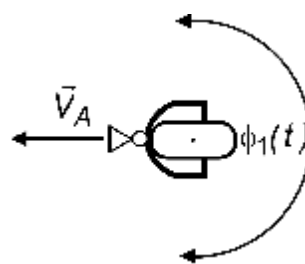


Рис. 2 – Специальное буксируемое пневмоколесо

Пневмоколесо закреплено так, что его диск всегда строго перпендикулярен опорной плоскости. Тяга AC абсолютно жесткая. Углы ее поворота $\phi_1 = \phi_1(t)$, где t – время в секундах, «малы». Скорость $\dot{V}_A = \text{const}$ обуславливает переносную скорость точки C , а углы поворота – относительную, которую обозначаем \dot{W}_C :

$$W_C = L\dot{\phi}_1,$$

точка сверху указывает на дифференцирование по времени t . В итоге скорость точки C равна:

$$\dot{V}_C = \dot{V}_A + \dot{W}_C.$$

«Малый» угол Δ между плоскостью диска пневмоколеса и вектором скорости точки C на виде сверху называется углом увода, он равен (рис. 1):

$$\Delta = \phi_1 + \phi_2,$$

где $\phi_2 = |\arctg(\dot{Y}_C / \dot{X}_C)|$, \dot{Y}_C, \dot{X}_C – проекции вектора \dot{V}_C на оси $O_g Y_g, O_g X_g$, соответственно. С учетом малости углов остановимся на приближении:

$$\Delta = \phi_1 + L\dot{\phi}_1 / V_A. \quad (1)$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$\beta / \alpha = K_F / k_F, \quad (2)$$

а

$$k_M \equiv K_M, \quad (3)$$

где $\beta, \alpha, K_F, k_F, K_M, k_M$ – требующие экспериментального определения механические постоянные шины: α, β – кинематические коэффициенты М.В. Келдыша; k_F, k_M – боковая и крутильная жесткости шины; K_F – коэффициент увода; K_M – коэффициент восстанавливающего момента в моделях увода. Соотношение (2) можно найти, к примеру, в [6, 7], а справедливость тождества (3) показана в [8].

Будем считать, что длина L не произвольная, а *специальная*:

$$L = L_* = \beta / \alpha. \quad (4)$$

Буксируемое пневмоколесо, длина выноса которого равна L_* , назовем *специальным буксируемым пневмоколесом* или *СБП-колесом*.

Пусть функция «малых» поворотов тяги имеет вид:

$$\phi_1(t) = \Phi_0 + \sum_{n=1}^N b_n \sin \omega_n t, \quad (5)$$

где Φ_0 и N, b_n, ω_n – заданные постоянные. Другими словами, функция «малых» поворотов тяги включает постоянное и зависящее от времени слагаемое, причем второе из них представлено своим разложением «по синусам». Из дальнейшего следует, что важна лишь принципиальная возможность представления поворотов в виде (5).

Двухмерный вектор $\{F, M\}$ описывает трение на пневмоколесе и является предметом нашего изучения. Ставится задача: для СБП-колеса и поворотов тяги (5) с помощью ряда известных моделей трения на пневмоколесе найти компоненты вектора трения и сопоставить полученные решения между собой.

3. Решения задачи о трении на СБП-колесе

3.1. Применение модели М. В. Келдыша

Будем использовать такую систему уравнений [3]:

$$\left. \begin{aligned} F &= k_F \xi, M = k_M \varphi, \\ \xi + L\dot{\phi}_1 &= -V_A (\varphi + \phi_1), \\ \dot{\phi} + \dot{\phi}_1 &= V_A (\alpha \xi - \beta \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где ξ, φ – абсолютные линейная и угловая деформации шины.

При заданном законе «малых» поворотов $\phi_1(t)$ уравнения (6) позволяют найти функции времени $F(t), M(t), \xi(t), \varphi(t)$.

Согласно (6) деформации $\xi(t), \varphi(t)$ без учета собственных колебаний для случая гармонического закона поворотов:

$$\phi_1(t) = \phi_0 \sin \Omega t, \quad (7)$$

где $\phi_0 = \text{const}$ – амплитуда и $\Omega = \text{const}$ – частота вынужденных гармонических колебаний, имеют вид [4]:

$$i = A_i(\bar{\Omega}, L, \alpha, \beta) \sin[\Omega t + \gamma_i(\bar{\Omega}, L, \alpha, \beta)], i = \xi, \varphi,$$

где A_i, γ_i – амплитуды и фазовые углы; $\bar{\Omega} = \Omega R / V_A$ – число С. Кларка [10].

Воспользовавшись решением [4] для СБП-колеса и закона поворотов (5), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -L_* \phi_1, \varphi = -\phi_1, \\ F(t) &= -k_F L_* \phi_1(t), M(t) = -k_M \phi_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Подчеркнем – амплитуды и фазовые углы при гармонических колебаниях тяги СБП-колеса не зависят ни от частоты Ω , ни от коэффициентов α, β .

3.2. *Применение упрощенной модели М. В. Келдыша.* Как показано в [5], вместо (6) для достаточно жестких пневматиков будем иметь:

$$F = k_F \xi, M = k_M (\alpha / \beta) \xi, \quad (9)$$

для нахождения деформации ξ нужно использовать дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\xi} + V_A (\alpha / \beta) \dot{\xi} = -V_A \phi_1 - \dot{\phi}_1 L.$$

В частном случае СБП-колеса имеем:

$$\ddot{\xi} + V_A (1 / L_*) \dot{\xi} = -V_A \phi_1 - \dot{\phi}_1 L_*. \quad (10)$$

Приняв во внимание (5), придем к зависимостям:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -L_* \phi_1, \\ F(t) &= -k_F L_* \phi_1(t), M(t) = -k_M \phi_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Сопоставив (8) и (11), заключим, для СБП-колеса упрощенная модель М. В. Келдыша для достаточно жестких пневматиков (9), (10), приводит к тем же результатам, что и исходная модель М. В. Келдыша (6).

3.3. *Применение гипотезы и модели И. Рокара,* [5, 9]. Соотношение:

$$F = -K_F \Delta \quad (12)$$

известно [5], как гипотеза И. Рокара; соотношения [9]:

$$\{F = -k_F \xi, \xi = \Delta R \quad (13)$$

назовем моделью И. Рокара.

Несмотря на то, что формулы (13) в [9] мало аргументированы, они нашли широкое применение. Приняв во внимание (1) и (13), находим:

$$F = -k_F R (\phi_1 + L_* \dot{\phi}_1 / V_A). \quad (14)$$

Рассматривая совместно (12) и (13), увидим:

$$K_F / k_F = R. \quad (15)$$

Это же соотношение представлено в [10], как эмпирическая формула О. В. Буданцевой.

Теперь совместно рассмотрим (2), (4) и (15). Получим:

$$L_* = R.$$

Иными словами, длина выноса СБП-колеса имеет порядок радиуса необжатой шины (рис. 2).

Перепишем (14), учтя только что полученную оценку:

$$F = -k_F L_* (\phi_1 + L_* \dot{\phi}_1 / V_A).$$

Если ограничиться режимами установившегося увода ($\dot{\phi}_1 = 0$), то применение гипотезы и модели И. Рокара дает результаты моделей 3.1 и 3.2.

3.4. *Основная аналитическая модель установившегося увода* [1]. В пределах «малых» установившихся углов увода ($\Delta \neq \Delta(t)$, $\Delta = \text{const} = \Delta_0$) справедливы линейные приближения:

$$\left. \begin{aligned} F &= -K_F \Delta, \\ M &= K_M \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где K_M – коэффициент восстанавливающего момента.

В [8] модель (6) рассмотрена для описания установившегося увода и, в частности, получено, что:

$$\Phi = -\Delta_0 = -\Phi_1.$$

Вспомним (2), (12). Таким образом, уравнения (16) согласуются с выше изложенным.

4. Заключение и выводы

Рассматривается прямая задача динамики катящегося пневмоколеса, решая которую находим поперечную силу трения и восстанавливающий момент. Ограничиваемся малыми углами увода и нулевым углом развала, а зоной скольжения в пятне контакта шины с опорной плоскостью пренебрегаем. Предложено выделять случай буксируемого с помощью жесткой тяги пневмоколеса, длина выноса назад которой отношению кинематических коэффициентов М. В. Келдыша (или случай специального буксируемого пневмоколеса). На основе полученных результатов приходим к выводам:

1. Случай специального буксируемого пневмоколеса (СПБ-колеса) целесообразно использовать в качестве «эталонного» решения для анализа работы полной модели трения на пневмоколесе при нулевом развале и в окрестности нулевого угла увода.

2. Упрощенная модель М. В. Келдыша, построенная в [5] для достаточно жестких пневматиков, в случае задачи СПБ-колеса дает те же результаты, что и исходная модель [3].

3. Модель М. В. Келдыша (1) согласуется с моделями установившегося увода (13) и (16).

Литература

1. Раджа, Н.В. Tyre and vehicle dynamics [Текст] / Н. В. Раджа. – Butterworth-Heinemann, 2006. – 642 p.
2. Саркисов, П.И. Обзор моделей нестационарного качения колеса с упругой шиной по недеформируемому опорному основанию [Текст]/ П. И. Саркисов, С.Д. Попов // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 12. – 18 с. URL: [tp://engjournal.ru/catalog/machin/transport/1129.html](http://engjournal.ru/catalog/machin/transport/1129.html).
3. Келдыш, М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси [Текст] / М.В. Келдыш // Труды ЦАГИ, 1945. – № 564. – 37 с.
4. Шифрин, Б.М. О модели шины М.В. Келдыша [Текст] / Б.М. Шифрин // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2009. – № 5/6(41). – С. 34 - 37.
5. Неймарк, Ю.И. Динамика неголономных систем [Текст] / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 520 с.
6. Певзнер, Я.М. О качении автомобильных шин при быстро меняющихся режимах увода [Текст] /Я. М. Певзнер// Автомобильная промышленность. – 1968. – №6. – С. 15 - 19.
7. Кручинин, П.А. Механика подавления параметрических колебаний управляемых колес транспортных машин: дис...кандидата физ.-мат. наук: 01.02.01 [Текст] / Кручинин Павел Анатольевич. – М., 1984. – 181 с.
8. Шифрин, Б.М. О стыковке моделей увода И. Рокара и М. В. Келдыша [Текст]/Б.М. Шифрин // Матер. міжнар. наук.-практ. конф. «Сучасні інформаційні технології в управлінні та професійній підготовці операторів складних систем», 27-28 жовтня 2010 р./ М-во освіти і науки України, Держ. льотна акад. України. – К., 2010. – С. 339 - 342.
9. Рокар, И. Неустойчивость в механике: автомобили, самолеты, висячие мосты: пер. с франц. [Текст] / И. Рокар. – М.: Изд. иностр. лит., 1959. – 287 с.
10. Смирчек, А.В. Расчет и испытания ориентирующихся колес на шимми [Текст] /А.В. Смирчек // Труды ЦАГИ. – 1950. – 26 с.
11. Clark, S. Dynamic properties of aircraft tires [Текст] /S. Clark, R. Dodge, G. Nybakken// J. aircraft. – 1974. – Vol. 11, №3. – P. 166 – 172.

Поступила в редакцію 28.08.2014

Shifrin B. M. Friction on air wheels: a special towed air wheel.

With the help of well-known mathematical models of low-dimensional dynamics the paper solves direct problem of dynamics of a rolling air wheel. The paper restricts itself to small slip angles and zero camber angle, neglects slip zone at the contact patch of the tire with the plane and finds the lateral force of friction and restoring moment. The author uses the model of M.V. Keldysh and its simplified version for hard tire and the model of steady withdrawal. It is shown that at a certain length of air wheel tow (i.e. for special towed air wheels) temporal laws of change for thrust rotation angles, lateral friction and restoring moment coincide up to constant size multiplier factors. In this case, regardless of the hardness of the tires, the original and the above-mentioned simplified models by M.V. Keldysh lead to the same results. The case of a special towed air wheel is convenient to use in the process of building a more complete model of friction — for testing its work in cases of small-angle slip.

Keywords: friction, air wheels, M. V. Keldysh, slip angle.

References

1. Pacejka, H.B. Tyre and vehicle dynamics. Butterworth-Heinemann, 2006. 642 p.
2. Sarkisov, P.I. Obzor modeley nestatsionarnogo kacheniya kolesa s uprugoy shinoy po nedeformiruemomu opornomu osnovaniyu. P. I. Sarkisov, S.D. Popov. Inzhenernyiy zhurnal: nauka i innovatsii. 2013. Vyip. 12. 18 s. URL: [tp:engjournal.ru/ catalog/machin/transport/1129.html](http://engjournal.ru/catalog/machin/transport/1129.html).
3. Keldysh, M.V. Shimmi perednego kolesa trehkolesnogo shassi. Trudy TsAGI, 1945. №564. 37 s.
4. Shifrin, B.M. O modeli shiny M.V. Keldyisha. Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovyih tehnologiy. 2009. №5/6(41). S. 34 – 37.
5. Neymark, Yu.I. Dinamika negolonomnyih sistem. Yu. I. Neymark, N.A. Fufaev. – M.: Nauka, 1967. – 520 s.
6. Pevzner, Ya.M. O kachenii avtomobilnyih shin pri byistro menyayuschihsya rezhimah uvoda. Avtomobilnaya promyshlennost. 1968. №6. S.15 – 19.
7. Kruchinin, P.A. Mehanika podavleniya parametricheskikh kolebaniy upravlyaemyih koles transportnyih mashin: dis...kandidata fiz.-mat. nauk: 01.02.01. Kruchinin Pavel Anatolevich. M., 1984. 181 s.
8. Shifrin, B.M. O styikovke modeley uvoda I. Rokara i M. V. Keldyisha. Mater. mIzhnar. nauk.-prakt. konf. «SuchasnI InformatsIynI tehnologIYi v upravlnnI ta profesIynIy pIdgo-tovtsI operatorIv skladnih sistem», 27–28 zhovtnya 2010 r. M-vo osvIti I nauki UkraYini, Derzh. lotna akad. UkraYini. K., 2010. S.339 – 342.
9. Rokar, I. Neustoychivost v mehanike: avtomobili, samoletyi, visyachie mostyi: per. s frants. M.: Izd. inostr. lit., 1959. 287 s.
10. Smrchek, A.V. Raschet i ispytaniya orientiruyuschihsya koles na shimmi. Trudy TsAGI. 1950. 26 s.
11. Clark, S. Dynamic properties of aircraft tires. S. Clark, R. Dodge, G. Nybakken. J. aircraft. 1974. Vol. 11, No 3. – P. 166–172.