

**Хлопенко Н.Я.,
Сорокина Т.Н.**
Национальный университет
кораблестроения имени адм. Макарова,
г. Николаев, Украина
E-mail: tan-sorokina@yandex.ru

**РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ТОЧНОСТЬ
РЕШЕНИЯ ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ СМАЗКИ
ПОДПЯТНИКА РЭЛЕЯ**

УДК 621.822

Выполнена конечно-разностная аппроксимация уравнения Рейнольдса для давлений в слое смазки по пятиточечному шаблону с явной схемой «крест». Для уравнения энергии использована конечно-разностная схема против потока с таким же шаблоном. Система термогидродинамических конечно-разностных уравнений решалась методом верхней релаксации. На конкретном примере выполнены расчеты статических характеристик подпятника Рэлея для различного числа узлов конечно-разностной сетки.

Ключевые слова: подпятник Рэлея ступенчатый, термогидродинамические уравнения смазки, конечно-разностная аппроксимация, относительная погрешность.

Введение

В работе [1] приведены термогидродинамические уравнения турбулентного течения смазки в несущем зазоре ступенчатого подпятника Рэлея. Они решались численно методом верхней релаксации. В процессе численного решения этих уравнений были получены статические характеристики данного подпятника. Выполнено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными других исследователей. Однако в указанной работе конечно-разностная схема термогидродинамических уравнений смазки и оценка погрешности полученных на ее основе разностных уравнений не приводилась.

Целью настоящей работы является построение конечно-разностных схем термогидродинамических уравнений смазки и оценка погрешности расчета статических характеристик ступенчатого подпятника Рэлея.

Для построения конечно-разностных схем термогидродинамических уравнений смазки использовался пятиточечный шаблон с явной схемой «крест» [2 - 4]. При аппроксимации уравнения энергии применялась разностная схема против потока [5, 6]. Полученная система термогидродинамических конечно-разностных уравнений решалась методом верхней релаксации [7]. Погрешность аппроксимации уравнений движения смазки определялась в процессе численного их решения указанным методом с уменьшением шага сетки до получения заданной точности расчета. Такой подход позволяет также оценить быстроту сходимости метода верхней релаксации. На конкретном примере показано, что предложенный метод решения системы уравнений сходится и обладает сравнительно малой относительной погрешностью.

Основные расчетные формулы

В обозначениях работы [1] турбулентное движение смазки в подпятнике Рэлея описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu k_\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r h^3}{\mu k_r} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \omega r^2 \frac{\partial h}{\partial \theta}; \quad (1)$$

$$\rho c_p \left(q_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + q_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \tau_c \frac{\mu (r\omega)^2}{h} + \frac{h^3}{\mu} \left[\frac{1}{k_\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{k_r} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2 \right]; \quad (2)$$

$$\text{где } q_\theta = \omega r \frac{h}{2} - \frac{h^3}{\mu k_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}; \quad q_r = -\frac{h^3}{\mu k_r} \frac{\partial P}{\partial r}; \quad \mu = \mu_0 \exp(-\alpha(T - T_{ex})). \quad (3)$$

Уравнение (1) этой системы описывает распределение давлений, а (2) – температур в смазочном слое.

Заметим, что выражения (3) представляют собой удельные расходы смазки в окружном и радиальном направлениях.

Граничными условиями для уравнения (1) служат равенство нулю давлений по внешнему замкнутому контуру Γ , образованному дугами окружностей радиусов r_1 , r_2 сектора, радиальными прямыми

ми $\theta = 0$, $\theta = \theta_c$ и неизвестное давление P_{ex} в области σ подвода смазки, а для уравнения (2) – начальная температура масла T_{ex} в области σ подвода смазки:

$$P|_{\Gamma} = 0; P|_{\sigma} = P_{ex}; T|_{\sigma} = T_{ex}. \quad (4)$$

Величина P_{ex} определяется из равенства расходов смазки в области σ подвода масла и на наружном замкнутом контуре Γ несущего слоя.

Для решения системы уравнений (1) и (2) при граничных условиях (4) используется конечно-разностная сетка размера $M \times N$, которая представлена на рис. 1.

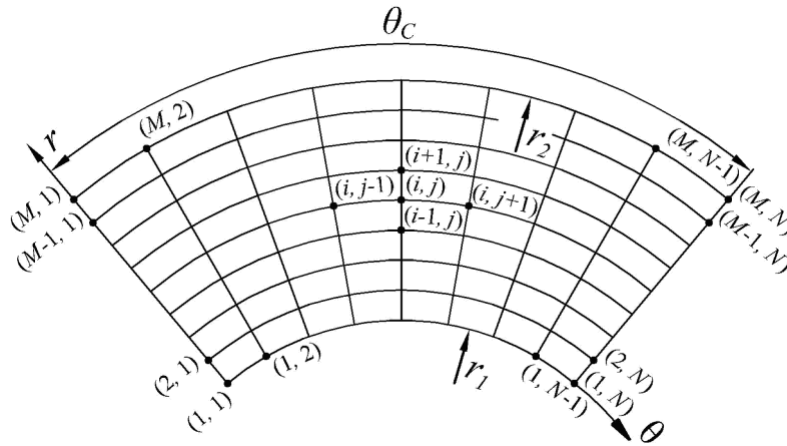


Рис. 1 – Дискретизация рабочей поверхности расчетной сеткой

Выделим произвольный узел (i, j) этой сетки и выполним аппроксимацию уравнений (1) и (2) по пятиточечному шаблону с явной схемой «крест» [2]:

$$\frac{h_{i,j}^3}{2\mu_{i,j}k_{\theta(i,j)}} \frac{(P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1}))}{e_{\theta}^2} + \frac{r_i^2 h_{i,j}^3}{2\mu_{i,j}k_r(i,j)} \frac{(P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}))}{e_r^2} = F_{i,j}; \quad (5)$$

$$\rho c_p \left(\frac{q_{\theta(i,j)}}{r_i} T_{\theta} + q_{r(i,j)} T_r \right) = E_{i,j} + \frac{h_{i,j}^3}{\mu_{i,j}} \left(\frac{1}{k_{\theta(i,j)} r_i} P_{\theta} + \frac{1}{k_r(i,j)} P_r \right), \quad (6)$$

где

$$F_{i,j} = \frac{\omega r_i^2 (h_{i,j+1} - h_{i,j-1})}{4e_{\theta}}; E_{i,j} = \tau_{c(i,j)} \frac{\mu_{i,j} (r_i \omega)^2}{h_{i,j}}; \quad (7)$$

$$q_{\theta(i,j)} = \frac{\omega r_i h_{i,j}}{2} - \frac{h_{i,j}^3 P_{\theta}}{r_i \mu_{i,j} k_{\theta(i,j)}}; q_{r(i,j)} = - \frac{h_{i,j}^3 P_r}{\mu_{i,j} k_r(i,j)};$$

$$T_{\theta} = \frac{(1 - \beta_{\theta}) T_{i,j+1} + \beta_{\theta} T_{i,j} - T_{i,j-1}}{2e_{\theta}}; T_r = \frac{(1 - \beta_r) T_{i+1,j} + \beta_r T_{i,j} - T_{i-1,j}}{2e_r}; \quad (8)$$

$$T_{\theta} = \frac{(1 - \beta_{\theta}) T_{i,j-1} + \beta_{\theta} T_{i,j} - T_{i,j+1}}{2e_{\theta}}; T_r = \frac{(1 - \beta_r) T_{i-1,j} + \beta_r T_{i,j} - T_{i+1,j}}{2e_r}; \quad (9)$$

$$P_{\theta} = \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j-1}}{2e_{\theta}}; P_r = \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2e_r}; \quad (10)$$

$$P_{\theta} = \frac{P_{i,j-1} - P_{i,j+1}}{2e_{\theta}}; P_r = \frac{P_{i-1,j} - P_{i+1,j}}{2e_r}; \quad (11)$$

$$P_{\theta} = \frac{2P_{i,j} - P_{i,j+1} - P_{i,j-1}}{2e_{\theta}}; P_r = \frac{2P_{i,j} - P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2e_r}; \quad (12)$$

$$P_{\theta} = \frac{-2P_{i,j} + P_{i,j+1} + P_{i,j-1}}{2e_{\theta}}; P_r = \frac{-2P_{i,j} + P_{i+1,j} + P_{i-1,j}}{2e_r}; \quad (13)$$

$h_{i,j}$ – толщина масляного слоя между пятой и подпятником;

$e_r = (r_2 - r_1)/(M - 1)$, $e_{\theta} = \theta_c/(N - 1)$ – шаг сетки в радиальном и окружном направлениях;

r_i – радиус сетки;

β_{θ} , β_r – весовые коэффициенты в окружном и радиальном направлениях;

$\mu_{i,j}$ – коэффициент динамический вязкости;

$k_{\theta(i,j)}$, $k_{r(i,j)}$, $\tau_{c(i,j)}$ – коэффициенты турбулентности в узле.

Весовые коэффициенты β_{θ} , β_r выбираются из диапазона $0 \leq \beta_{\theta} \leq 1$ и $0 \leq \beta_r \leq 1$ [4]. Когда $\beta_{\theta} = \beta_r = 0$, то выражение (8) и (9) принимают вид центрально-разностной производной, а при $\beta_{\theta} = \beta_r = 1$ – левой разностной производной.

Заметим, что в сеточном уравнении энергии (6) аппроксимация давлений и температур (8) – (13) представлена по схеме против потока. В этой схеме выражения (8) и (10) применяются при движении смазки вдоль осей θ и r (рис.1) соответственно, выражения (9) и (11) – при движении смазки в противоположном направлении, выражения (12) – при движении смазки с торможением вдоль осей θ и r соответственно и выражения (13) – при движении смазки в противоположном направлении с торможением.

Записанная система уравнений (5) и (6) представляет собой алгебраическую систему уравнений. Она имеет второй порядок точности для давления и температуры и решается методом последовательной верхней релаксации. Согласно этому методу конечно-разностные уравнения (5) и (6) представляются в виде:

$$\frac{h_{i,j}^3}{2\mu_{i,j}k_{\theta(i,j)}} \frac{(P_{i,j+1}^{m-1} - 2P_{i,j}^{m-1} + P_{i,j-1}^{m-1})}{e_{\theta}^2} + \frac{r_i^2 h_{i,j}^3}{2\mu_{i,j}k_{r(i,j)}} \frac{(P_{i+1,j}^{m-1} - 2P_{i,j}^{m-1} + P_{i-1,j}^{m-1})}{e_r^2} = F_{i,j}; \quad (14)$$

$$\rho c_p \left(\frac{q_{\theta(i,j)}}{r_i} T_{\theta} + q_{r(i,j)} T_r \right) = E_{i,j} + \frac{h_{i,j}^3}{\mu_{i,j}} \left(\frac{1}{k_{\theta(i,j)} r_i} P_{\theta} + \frac{1}{k_{r(i,j)}} P_r \right), \quad (15)$$

где

$$T_{\theta} = \frac{(1 - \beta_{\theta})T_{i,j+1}^{m-1} + \beta_{\theta}T_{i,j}^{m-1} - T_{i,j-1}^{m-1}}{2e_{\theta}}; T_r = \frac{(1 - \beta_r)T_{i+1,j}^{m-1} + \beta_r T_{i,j}^{m-1} - T_{i-1,j}^{m-1}}{2e_r}; \quad (16)$$

$$T_{\theta} = \frac{(1 - \beta_{\theta})T_{i,j-1}^{m-1} + \beta_{\theta}T_{i,j}^{m-1} - T_{i,j+1}^{m-1}}{2e_{\theta}}; T_r = \frac{(1 - \beta_r)T_{i-1,j}^{m-1} + \beta_r T_{i,j}^{m-1} - T_{i+1,j}^{m-1}}{2e_r}; \quad (17)$$

где m – номер итерации.

Далее записанная система уравнений (14) и (15) решается итерационным методом по следующему алгоритму:

1. Задаются граничные значения давлений и температур в узлах конечно-разностной сетки в соответствии с выражениями (4).

2. Задаются начальные значения давлений P_{ax} , $P_{i,j} = 0$ и температур $T_{i,j} = T_{ax}$ во внутренних узлах сетки, кроме граничных узлов.

3. Рассчитываются значения коэффициента вязкости $\mu_{i,j}$ смазки в узлах по заданному значению температур $T_{i,j}$.

4. Рассчитывается поле давлений $P_{i,j}$ из уравнения (14). Для первой итерации значения давлений в окружающих узлах точки (i, j) определяется граничными и начальными значениями (шаги 1 и 2).

5. Уточняются давления в узлах по методу последовательной верхней релаксации:

$$P_{i,j}^m = (1 - \lambda_p)P_{i,j}^{m-1} + \lambda P_{i,j}, \quad (18)$$

где λ_p – коэффициент релаксации. Для верхней релаксации его значения по данным работы [7] находятся в интервале (1, 2).

6. Шаги 4 - 5 повторяются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность для давлений в узловых точках сетки на двух последовательных итерациях:

$$\left| P_{i,j} - P_{i,j}^{m-1} \right| \leq \varepsilon_p, \quad (19)$$

где $\varepsilon_p = 10^{-6}$ – заданная точность для давлений.

7. Рассчитывается поле температур $T_{i,j}$ из уравнения (15). Для первой итерации значения температуры в окружающих узлах точки (i, j) определяется граничными и начальными значениями (шаги 1 и 2).

8. Уточняются значения температур в узлах по методу последовательной верхней релаксации:

$$T_{i,j}^m = (1 - \lambda_T)T_{i,j}^{m-1} + \lambda T_{i,j}, \quad (20)$$

где λ_T – коэффициент релаксации. Для верхней релаксации его значения по данным работы [7] находятся в интервале (1, 2).

9. Шаги 7 - 8 повторяются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность для температур в узловых точках сетки на двух последовательных итерациях:

$$\left| 1 - \frac{T_{i,j}^m}{T_{i,j}^{m-1}} \right| \leq \varepsilon_T, \quad (21)$$

где $\varepsilon_T = 10^{-3}$ – заданная относительная точность для температур.

10. Уточняются значения коэффициента вязкости $\mu_{i,j}$ смазки в узлах по найденному значению температур $T_{i,j}$.

11. Рассчитывается расход смазки Q_Γ на внешнем замкнутом контуре Γ .

12. Шаги 4 - 11 повторяются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность по расходу смазки Q_Γ на внешнем замкнутом контуре Γ на двух последовательных итерациях:

$$\left| 1 - \frac{Q_\Gamma^m}{Q_\Gamma^{m-1}} \right| \leq \varepsilon_Q, \quad (22)$$

где $\varepsilon_Q = 1,5 \cdot 10^{-4}$ – заданная относительная точность для расхода.

13. Уточняется давление P_{ex} из равенства расходов смазки на входе Q_σ в области подвода σ и Q_Γ на внешнем замкнутом контуре Γ .

14. Шаги 4 - 13 повторяются до тех пор, пока равенство расходов смазки на внешнем замкнутом контуре Γ и в области σ подвода смазки не будет удовлетворять заданной точности на двух последовательных итерациях:

$$\left| 1 - \frac{Q_\sigma^m}{Q_\Gamma^m} \right| \leq \varepsilon_{\Delta Q}, \quad (23)$$

где $\varepsilon_{\Delta Q} = 10^{-10}$ – заданная относительная точность для баланса расхода.

15. Рассчитываются по методу трапеции [2] такие статические характеристики подпятника как:
- грузоподъемность:

$$W = z_c \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_c} P r d\theta dr; \quad (24)$$

- потери мощности на трение:

$$N_{тр} = z_c \omega \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_c} \left(-\frac{h}{2r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \tau_c \mu \frac{\omega r}{h} \right) r^2 d\theta dr; \quad (25)$$

- расход смазки:

$$Q_{\Gamma} = z_c \left(\int_{r_1}^{r_2} q_{\theta_0} dr + \int_{r_1}^{r_2} q_{\theta_c} dr + \int_0^{\theta_c} q_{r_1} r d\theta + \int_0^{\theta_c} q_{r_2} r d\theta \right). \quad (26)$$

Рассмотренный алгоритм реализован в виде программы, написанной на языке ФОРТРАН 95 применительно к персональному компьютеру.

Анализ полученных результатов

Численные расчеты проводились для ступенчатого подпятника Рэлея [1]. Результаты проведенных вычислений грузоподъемности W , потерь мощности на трение $N_{тр}$, расхода смазки Q и температуры T представлены в таблице.

Размер сетки	Грузоподъемность W , Н	Потери на трение $N_{тр}$, кВт	Расход смазки Q , л/с	Температура T , °С
50 × 50	1157,487	2,2767	0,153768	123,339
60 × 60	1177,487	2,2842	0,144227	126,063
80 × 80	1211,440	2,2753	0,084070	126,090
100 × 100	1230,925	2,3066	0,097299	127,122

Их анализ показывает, что с увеличением размеров конечно-разностной сетки точность расчетов статических характеристик подпятника Рэлея возрастает, а погрешность падает и при размере сетки 80 × 80 не превышает 1 %.

Таким образом, построены конечно-разностные схемы термогидродинамических уравнений смазки, предложен численный алгоритм и выполнена оценка погрешности расчета статических характеристик подпятника Рэлея.

Выводы

1. Построенная конечно-разностная схема системы термогидродинамических уравнений смазки ступенчатого подпятника Рэлея является сходящейся.
2. Предложенный численный алгоритм обеспечивает требуемую точность решения системы термогидродинамических уравнений смазки на мелкой конечно-разностной сетке.

Литература

1. Хлопенко, Н. Я. Турбулентная неизотермическая смазка ступенчатого подпятника Рэлея / Н.Я. Хлопенко, Т. Н. Сорокина // Проблемы Трибологии: 2013. – №4. – С. 40-45.
2. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин – М.: Наука, 1978. – 512 с.
3. Годунов, С. К. Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенский - 2-е изд., испр. - М.: Наука, 1977. – 440 с.
4. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский - 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1989. – 516 с.
5. Потер, Д. Вычислительные методы в физике / Д. Потер – М.: Мир, 1975. – 394 с.
6. Дульнев, Г. Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена / Г. Н. Дульнев, В. Г. Парфенов, А. В. Сигалов – М. : Высшая школа, 1990. – 207 с.
7. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е.С. Николаев – М.: Наука, 1978. – 592 с.

Поступила в редакцию 12.06.2015

Khlopenko N.Y., Sorokina T.N. Thermohydrodynamic lubrication equation's residual schemes and accuracy solution for Reyleigh step bearing.

The system of the thermo hydrodynamic lubrication equations for the Reyleigh step bearing is consists of Reynolds equation for pressure in the layer and energy equation. The energy equation includes the specific oil consumption equations. Turbulence factors were used in above mentioned equations to make use of Constantinescu method.

The main aim of the article is to present and describe the thermo hydrodynamic lubrication equation's residual schemes and estimate the approximation relative error for Reyleigh step bearing thermo hydrodynamic lubrication equations.

The finite-difference approximation was carried out for the Reyleigh step bearing thermohydrodynamic lubrication equations using the second order of accuracy derivatives for five assembly mould cross form. The convection heat exchange for temperature areas determination on the basis of difference against steam scheme with a pressure gradient influence was taking into account. Consequently, the method of the over relaxation was applied to solve a problem.

The finite-difference approximation description for Reyleigh step bearing thermo hydrodynamic lubrication equations gives a possibility to carrying out the calculations of the thrust bearing static characteristics using temperature range and oil viscosity.

As a result, the relative error for loading characteristics is represented it as a diagram. Introduced finite-difference approximation can become the basic part for the Relay step bearings calculations in laminar or turbulent regimes.

Key words: reyleigh step bearing, thermohydrodynamic lubrication equations, finite-difference approximation, relative error.

References

1. Hlopenko N. Ja., Sorokina T. N. Turbulentnaya neizotermicheskaya smazka stupenchatogo podpyatnika Releya, Problemi Tribologii [Problems of Tribology], 2013, issue 4, pp. 40-45.
2. Kalitkin N.N. Chislennyye metody, Moscow, Nauka Publ., 1978, 512 p.
3. Godunov S. K., Ryabenkiy V. S. Raznostnye skhemy (vvedenie v teoriyu), Moscow, Nauka Publ., 1977, 440 p.
4. Samarskiy A. A., Teoriya raznostnykh skhem, Moscow, Nauka Publ., 1989, 516 p.
5. Poter D., Vychislitelnye metody v fizike, Moscow, Mir Publ., 1975, 394 p.
6. Dul'nev G. N. Primenenie JeVM dlja reshenija zadach teploobmena, Moscow, Vysshaja shkola Publ., 1990, 207 p., (JeVM v tehicheskom vuze)
7. Samarskiy A. A., Nikolaev E.S. Metody resheniya setochnyx uravnenij, Moscow, Nauka Publ., 1978, 592 p.