Матняк С.В.

ДОВЕДЕННЯ СПРАВЕДЛИВОСТІ ГІПОТЕЗИ РІМАНА

УДК 511.3

В статті дається доведення справедливості гіпотези Рімана за допомогою скінченних показникових функціональних рядів і скінченних показникових фукціональних прогресій.

Ключові слова: гіпотеза Рімана, гіпотеза Мертенса, функція Мебіуса, скінченний показниковий функціональний ряд, скінченна показникова функціональна прогресія.

Вступ

Гіпотеза Рімана про розподіл нулів дзета-функції Рімана була сформульована Бернхардом Ріманом в 1859 році.

В той же час, оскільки не існує простої закономірності, яка описує розподіл простих чисел серед натуральних, Ріман знайшов, що кількість простих чисел, які не перевищують x, позначаються $\pi(x)$, виражаються через розподіл нетривіальних нулів дзета-функції. Велика кількість тверджень про розподіл простих чисел, в тому числі про обчислювальні складності деяких цілочислових алгоритмів, доведені в припущенні правильності гіпотези Рімана.

В 1896 році Адамар і Валле-Пуссен незалежно довели, що нулі дзета-функції не можуть лежати на прямих $\operatorname{Re}(x)=0$ і $\operatorname{Re}(x)=1$.

В 1900 році Давід Гільберт включив гіпотезу Рімана в список 23 невирішених проблем, як частину восьмої проблеми, разом з гіпотезою Гольдбаха.

В 1914 році Харді довів, що на критичній лінії знаходиться нескінчено багато нулів, а пізніше разом з Літлвудом дав нижню оцінку долі нулів, які лежать на критичній лінії, яку потім покращували різні математики.

Тітчмарш і Ворос в 1987 році показали, що дзета-функція може бути розкладена в добуток через свої нетривіальні нулі в розклад Адамара. На 2004 рік перевірено більше 10^{13} перших нулів. В статті доводиться теорема про правильність гіпотези Рімана для дзета-функції.

Постановка проблеми (Гіпотеза Рімана)

Всі нетривіальні нулі дзета-функції мають дійсну частину рівну $\sigma=\frac{1}{2}$. Дзета-функція Рімана $\varsigma(s)$ визначена для всіх комплексних $s\neq 1$ і має нулі у від'ємних парних $s=-2,-4,-6,\ldots$.

Із функціонального рівняння:

$$\varsigma(s)=2^s\cdot\pi^{s-1}\cdot\sin\frac{\pi\cdot s}{2}\cdot\Gamma(1-s)\cdot\varsigma(1-s)$$

і явного виразу $\frac{1}{\varsigma(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$ при $\operatorname{Re}>1$ випливає, що всі інші нулі, які називаються "нетривіальними", знаходяться в полосі $0<\operatorname{Re}<1$ симетрично відносно так званої "критичної лінії" $\frac{1}{2}+it$, $t\in R$.

Роз'язання. Для підтвердження гіпотези Рімана дамо означення і доведемо наступні теореми.

Означення 1. Вираз

$$\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}u^{\frac{1}{k}}(x)=u(x)+u^{\frac{1}{2}}(x)+u^{\frac{1}{3}}(x)+\ldots+u^{\frac{1}{[\sqrt{n}]}}(x) \tag{1}$$

називається скінченним показниковим функціональним рядом відносно зміної показника степення $\frac{1}{k}$, де $k=\{1,2,3,\ldots,\lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$.

Означення 2. Прогресії виду:

$$a(x),a(x)\cdot q(x),a(x)\cdot q^2(x),\ldots,a(x)\cdot q^{\sqrt{x}}(x) \tag{2}$$

називаються скінченними показниковими функціональними прогресіями, якщо в них перший член $a(x)$ є функцією від x або дорівнює 1, а знаменик $q(x)$ є функцією зміної $x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Теорема 1. Якщо множина натуральних чисел $N_n^+ = \{1,2,...,k,...,n\}$ є об'єднання підмножин $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ і ці підмножини попарно неперетинаються і мають відповідно по m, r, s, t, v, u елементів, то кількістю елементів множини $N_n^+ = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6$ буде рівною:

$$n = m + r + s + t + v + u.$$

Доведення. Теорема доводиться аналогічно теоремі 7.11 [1, ст. 50].

Теорема 2. $M(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)$ в ряді $\frac{1}{\varsigma(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ дорівнює $|M(n)| < 2{,}5\sqrt{n}$.

Доведення. Нехай число $N = N(n)$ є кількість елементів множини натуральних чисел $N_n^+ = \{1,2,3,...,n\}$. Натуральний ряд N_n^+ складається: з простих чисел, кількість яких позначимо через $\Pi = \Pi(n)$; з натуральних чисел, які діляться на p^m з часткою 1 при $m \geq 2$, кількість яких позначимо через $K = K(n)$; з натуральних чисел, які діляться на p^m з часткою відмінною від 1 при $m \geq 2$, кількість яких позначимо через $K^к = K^к(n)$;з чисел, які розкладаються на добуток парної кількості множників, позначимо кількість цих чисел через $T^п = T^п(n)$, а кількість чисел, які розкладаються на добуток непарної кількості простих чисел, позначимо через $T^н = T^н(n)$. Тоді, кількість натуральних чисел N множини натуральних чисел N_n^+, відповідно до теореми 1 дорівнює:

$$N = 1 + \Pi + T^п + T^н + K^к + K. \tag{3}$$

Кількість натуральних чисел $K(n)$ наближено запишемо у вигляді скінченого показникового функціонального ряду, позначивши його через $f_1(n)$, тоді:

$$f_1(n) = \sum_{k=2}^{\sqrt{n}} n^{\frac{1}{k}} = \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n} + ... + \sqrt[[\sqrt{n}]]{n}. \tag{4}$$

Означення 3. Натуральними числами, які перекриваються, називаються числа скінченного показникового функціонального ряду (4), в якому вони зустрічаються більше одного разу.

Позначимо, що $N = n$ і $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{[\sqrt{n}]}$. Функція $f_1(n) > K(n)$, тому що у функцію крім чисел $K(n)$ входять і числа, які перекриваються.

Означення 4. Дві нескінченно великі функції $f(n)$ і $\varphi(n)$, які не дорівнюють одна одній $f(n) \neq \varphi(n)$, називаються еквівалентними, якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\varphi(n)} = 1$ при $\varphi(n) \neq 0$.

Скінченний показниковий функціональний ряд (4) апроксимуємо сумою скінченної показникової функціональної прогресії:

$$\varphi_1\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = 1 + n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} + n^{\frac{2}{\sqrt{n}}} + n^{\frac{3}{\sqrt{n}}} + ... + n^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Скінченний показниковий функціональний ряд (4) і сума скінченної функціональної прогресії (5) еквівалентні, тому що:

$$k_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{f_1(n)}{\varphi_1\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + ... + \sqrt[\sqrt{n}]{n}}{1 + n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} + n^{\frac{2}{\sqrt{n}}} + ... + n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1 + n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} + ... + n^{\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{n}\left(n^{-\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}} + n^{\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}} + ... + 1\right)} = 1.$$

Оскільки, $n^{\frac{1}{2}} > n^{\frac{k}{\sqrt{n}}}$, де $k < \frac{\sqrt{n}}{2}$ і $k - \frac{\sqrt{n}}{2} < 0$ знайдемо суму скінченної показникової функціональної прогресії (5) з $q = n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Тоді $S_1(N) = \frac{a \cdot \left(\sqrt{n} - 1\right)}{\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)}$, при $a = 1$ маємо $S_1(N) = \frac{\left(\sqrt{n} - 1\right)}{\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)}$. При $n \to \infty$ $S_1(N) \to \infty$.

Порівняємо функцію $S_1(N)$ з функцією $f(n) = N$. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{S_1(n)}$. Для цього обчислимо $\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)$ при $n \to \infty$. Проведемо заміну $n = t^2$, звідки $t = \sqrt{n}$ і тоді будемо мати:

$$\left(t^{2\frac{1}{t}} - 1\right) = \left(t^{\frac{1}{t}} - 1\right) \cdot \left(t^{\frac{1}{t}} + 1\right) < \frac{4}{\sqrt{t}} = \frac{4}{\sqrt[4]{n}}$$

оскільки, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Застосовуючи до функцій $f(n)$ і $S_1(n)$ результати одержані в [2, ст. 67] і беручи до уваги те, що функції $f(n)$ і $S_1(n)$ визначенні на інтервалі $[1, n]$ будемо мати:

$$k_1 = \frac{f(n)}{S_1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\dfrac{\sqrt{n}-1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}} < \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\dfrac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2,$$

отже, $k_1 < 2$.

Твердження 1. Кількість натуральних чисел, які перекриваються, менша від $\frac{5}{4}\sqrt{n}$.

Доведення. Для доведення цього твердження позначимо через K^n – числа, які зустрічаються більше, ніж один раз в скінченному показниковому функціональному ряді (4) при $n \to \infty$ і використаємо наступний скінченний показниковий функціональний ряд, який позначимо через $f_2\left(n^{\frac{1}{2k_1}}\right)$ і одержимо:

$$f_2(n) = \sum_{k=2k_1}^{[\sqrt{n}]} n^{\frac{1}{k}} = n^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{6}} + \ldots + n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}, \tag{6}$$

де $k_1 = \left\{2, 3, \ldots, \frac{[\sqrt{n}]}{2}\right\}$.

Скінченний показниковий функціональний ряд (6) замінимо еквівалентною сумою скінченної показникової функціональної прогресії:

$$\varphi_2\left(n^{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right) = 1 + n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} + n^{\frac{2}{\sqrt{n}}} + \ldots + n^{\frac{1}{5}} + n^{\frac{1}{4}}. \tag{7}$$

Суму прогресії $\varphi_2\left(n^{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$ розглядаємо, як суму функціональної прогресії з $q = n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Тоді знаходимо $S_2(n)=\dfrac{\sqrt[4]{n}-1}{\sqrt[\sqrt{n}]{n}-1}$. Порівняємо $\sqrt{n}$ з функцією $S_2(n)$. Для того, щоб обчислити $\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$, покладемо $t^2=n$, або $t=\sqrt{n}$ і одержимо:

$$\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)=\left(t^{\frac{2}{t}}-1\right)=\left(t^{\frac{1}{t}}-1\right)\cdot\left(t^{\frac{1}{t}}+1\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt[t]{t}=1$, то $\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)<\dfrac{4}{\sqrt[4]{n}}$. І далі будемо мати:

$$k_2=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\dfrac{\sqrt[4]{n}-1}{\sqrt[\sqrt{n}]{n}-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n}}{\dfrac{1}{\sqrt[\sqrt{n}]{n}-1}}<\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n}}=4.$$

Звідки одержуємо, що $k_2<4$, або $\sqrt{n}-4\cdot f_2\left(n^{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)<0$. Отже, $\dfrac{\sqrt{n}}{4}<\varphi_2\left(n^{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$.

Беручи до уваги значення суми скінченної показникової функціональної прогресії $\varphi_2\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$, запишемо, що $\dfrac{\sqrt{n}}{4}<K^n(n)<\sqrt{n}+\dfrac{\sqrt{n}}{4}=\dfrac{5}{4}\sqrt{n}$.

Твердження 1 доведено.

Тоді можна записати, що:

$$N(n)-2f_1(n)<0. \tag{8}$$

Використовуючи нерівність $f_1(n)>K(n)$, запишемо, що:

$$f_1(n)\approx K(n)+K^n(n). \tag{9}$$

Підставляємо значення функції $f_1(n)$ (9) в (8), одержимо:

$$N(n)-2\cdot\left(K(n)+K^n(n)\right)<0.$$

Використовуючи твердження 1, одержимо:

$$N(n)-2\cdot\left(K(n)+\frac{5}{4}\sqrt{n}\right)<0.$$

Звідки знаходимо, що:

$$N(n)-2\cdot K(n)<\frac{5}{2}\sqrt{n}.$$

Підставляючи замість N його значення з (3), одержимо:

$$1+\Pi+T^{н}+T^{п}+K^{к}-K<2{,}5\sqrt{n}. \tag{10}$$

Для повного доведення теореми розглянемо наступний скінченний показниковий ункціональний ряд:

$$f_3(n)=\sum_{k=5}^{[\sqrt{n}]}n^{\frac{1}{k}}=n^{\frac{1}{5}}+n^{\frac{1}{6}}+\ldots+n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}, \tag{11}$$

де $k=\{5,6,7,\ldots,[\sqrt{n}]\}$.

Скінченний функціональний ряд (11) замінимо еквівалентною сумою функціональної прогресії:

$$\varphi_3\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)=1+n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}+n^{\frac{2}{\sqrt{n}}}+\ldots+n^{\frac{1}{6}}. \tag{12}$$

Суму функціональної прогресії (12) запишемо у вигляді $S_3(N)=\dfrac{n^{\frac{1}{6}}-1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}$ і порівняємо $\sqrt{n}$ із $S_3(N)$:

$$k_3=\frac{\sqrt{n}}{S_3(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\dfrac{n^{\frac{1}{6}}-1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}}<\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{4}}\cdot\left(n^{\frac{1}{6}}-1\right)}<4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{6}}}=\infty .$$

Тоді $K<\varphi_3\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)+\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}+\sqrt[5]{n}<2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}$, отже

$$1+\Pi+T^{n}+T^{н}+K^{к}<2{,}5\sqrt{n}+K<4{,}5\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n} .$$

Тоді можна записати, що відповідно до властивостей функції Мебіуса [4, ст. 1]:

$$1+T^{n}-\left(\Pi+T^{н}\right)<2{,}5\sqrt{n} .$$

Тому

$$\left|M(n)\right|<2{,}5\sqrt{n} . \tag{13}$$

Теорема доведена.

Із виразу 6 [5,ст.117] $\left(M(n)=\Omega\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right)$ маємо, що $\left|M(n)\right|>n^{\frac{1}{2}}$. Отже, можна записати, що:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(n)}{\sqrt{n}}>1 .$$

В теоремі 2 доводиться, що верхня і нижня межа значень функції $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M(n)}{n^{\frac{1}{2}}}$ дорівнює:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{M(n)}{\sqrt{n}}<2{,}5 \quad \text{і}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{M(n)}{\sqrt{n}}>1$$

відповідно.

Твердження 2. $2{,}5\sqrt{n}<n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ *при* $n\to\infty$.

Доведення. Відповідно до теореми 54 [5, ст. 114] маємо $M(n)=O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$. Порівнюючи значення $M(n)=O\left(2{,}5\sqrt{n}\right)$ з $M(n)=O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$, запишемо, що $2{,}5\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}$ при $n\to\infty$. Звідки знаходимо, що $\varepsilon_0=\dfrac{\ln 2{,}5}{\ln n}$ при $n\to\infty$ $\varepsilon_0\to 0$. Тому можна вважати, що $\varepsilon>\varepsilon_0$, де ε −будь–яке мале число. І звідси маємо, що $2{,}5\sqrt{n}<n^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}$ при $n\to\infty$.

Твердження 2 доведено.

Теорема 3. Ряд $\frac{1}{\varsigma(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$ збіжний при $\sigma=\frac{1}{2}+\varepsilon>\frac{1}{2}$ і $|M(n)|<2{,}5\sqrt{n}$, де ε довільно мале число.

Наслідок теореми 3 (Гіпотеза Рімана). Всі нетривіальні нулі дзета- функції мають дійсну частину рівну $\sigma=\frac{1}{2}$.

Доведення. Необхідною і достатньою умовою справедливості гіпотези Рімана є збіжність ряду $\frac{1}{\varsigma(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$ при $\sigma>\frac{1}{2}$ [5, ст. 114]. Знаходимо збіжність ряду, коли $M(n)=O(2{,}5\sqrt{n})$ $\sigma=\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{\xi\left(\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(n)}{n^{\frac{1}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(n)-M(n-1)}{n^{\frac{1}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}M(n)\cdot\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}M(n)\left(\frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}\cdot(n+1)^{\frac{1}{2}}}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(n)}{2n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2{,}5\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}}=\frac{2{,}5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to\infty$$ – ряд розбіжний.

А при $\sigma=\frac{1}{2}+\varepsilon>\frac{1}{2}$ маємо:

$$\frac{1}{\varsigma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\le\frac{2{,}5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\le\frac{2{,}5}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}dn=\frac{2{,}5}{2\varepsilon}=1{,}25\cdot\frac{1}{\varepsilon}$$ – ряд збіжний,

де ε – будь-яке мале число.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\cdot n^{-s}$ збігається рівномірно при $\sigma=\frac{1}{2}+\varepsilon>\frac{1}{2}$, а оскільки він представляє функцію $\frac{1}{\varsigma(s)}$ при $\sigma>1$, то за теоремою аналітичного продовження , він представляє її також і при $\frac{1}{2}<\sigma\le 1$. Тому гіпотеза Рімана справедлива.

Теорема доведена.

Література

1. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел, ч.1. Числа. Учеб. пособие для студентов физ. – мат.фак– тов пед. ин-тов. – М.: " Просвещение", 1974. – 383 с.
2. Фихтенгольц Г.М.. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.:"Наука", 1969.– 607 с.
3. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Учеб. пособие для педагогических институтов. – М.: Высш. школа, 1979. – 559 с.
4. A.M. Odlyzko and Herman te Riele. Disproof of the Mertens Conjeture. Jornal fur die reine und angewandte Mathematik. 357. (1985) pp. 138-160.
5. Титчмарш Е.К. Дзета– функции Римана. – М.: ИЛ, 1947. – 154с.

Поступила в редакцію 26.03.2013

Matnyak S.V. **Proof of the correctness of the Piemann's hypothesis.**

The paper provides proof of the Rimann's conjecture. The results of the works of A. M. Odlyzko and H. te Riile "Disproof of the Conjecture", which gives a disproof of the hypothesis Mertens, using to prove the Riemann's hypothesis. This paper introduces new finite series of exponential function, which is determined by the number of even. The number of multiple natural numbers compared with the amount of the functional progression and faund is their numerical value. The paper introduces new concepts in analytic number thery as "natural numbers thah overlap". Also, a theorem proved, which gives a more accurate result for "notrivial zeros" than the Riemann's hypothesis.

Key words: Riemann's hypothesis, hypothesis of Mertens, function of Möbius, finite exponential functional series, finite exponential functional progression.

References

1. Ljapin E.S., Evseev A.E. Algebra i teorija chisel, ch.1. Chisla. Ucheb. posobie dlja studentov fiz. mat. fak□tov ped. in-tov. M. Prosveshhenie, 1974. 383 p.
2. Fihtengol'c Г.М.. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. T. 1. M."Nauka", 1969. 607 p.
3. Kulikov L. Ja. Algebra i teorija chisel. Ucheb. posobie dlja pedagogicheskih institutov. M.: Vyssh. shkola, 1979. 559 p.
4. Odlyzko A.M., Herman te Riele. Disproof of the Mertens Conjeture. Jornal fur die reine und angewandte Mathematik. 357. (1985) pp. 138-160.
5.E.K. Titchmarsh. Dzeta □funkcija Rimana. M. 1947. 154p.