

Кузьяев И.М., ***Бурия А.И.****

*Украинский государственный
химико-технологический университет,
**Днепропетровский государственный
аграрный университет,
г. Днепропетровск, Украина

РАСЧЕТ ДАВЛЕНИЯ В ЗОНЕ КОНТАКТА ЖЕСТКОЙ СФЕРЫ С ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДОЙ

Введение

При решении большого количества научных и практических задач необходимо оценить прочностные свойства различных механических систем, элементы которых могут быть выполнены из различных типов материалов: упругих, вязкоупругих, пластических. При этом данные элементы во многих случаях взаимодействуют с другими объектами различной геометрической формы, как в статических, так и в динамических режимах функционирования. Большинство таких задач относится к контактным задачам.

Один из основных аналитических методов при анализе контактных задач базируется на теории функций комплексного переменного, которая позволяет получить адекватное решение реальным условиями работы изучаемых объектов.

1. Постановка задачи

В настоящее время наиболее разработанным математическим аппаратом при контакте двух тел является теория, разработанная Герцем. При этом следует отметить, что данная теория построена на ряде достаточно грубых допущений, которая идеализирует свойства реальных тел, что особенно сказывается при анализе вязкоупругих тел.

Осуществляя моделирование контактных задач, как правило, следует одновременно решать системы уравнений равновесия и совместности с учетом краевых условий. В ряде случаев связь между силовыми факторами и перемещениями в области контакта взаимодействующих тел можно выразить через функции Грина. Основными численными методами решения данного типа задач являются: метод интегральных уравнений и теории потенциала.

В работе [1] было представлено уравнение (6), позволяющее моделировать давление под штампом сферической формы на поверхности наклонной упругой поверхности, а также предложена методика перехода от упругой задачи к вязкоупругой.

2. Определение переходных коэффициентов

Покажем далее использование предложенной методики, применив ее к уравнению (6) из [1], представив его следующим образом:

$$P(x) = \frac{CF_v \cdot F_{cn}}{\pi \cdot (x+a)^{\theta_1} \cdot (b-x)^{\theta_2}} + C\tau_v \cdot \tau_0 \cdot \frac{(a+b) \cdot \theta_2 - (a+x)}{(x+a)^{\theta_1} \cdot (b-x)^{\theta_2}} + CB_v \cdot B \cdot \frac{(a+b)^2 \cdot (0,25 - \theta^2) + 2 \cdot x \cdot [(a+b) \cdot \theta_2 - (a+x)]}{2 \cdot R \cdot (x+a)^{\theta_1} \cdot (b-x)^{\theta_2}}, \quad (1)$$

где $\theta_1 = 0,5 + \theta$, $\theta_2 = 0,5 - \theta$, $\theta = 1/\pi \cdot \arctg(\mu \cdot N_v)$ ($0 < \theta < 0,5$);

$$CF_v = \left[\sqrt{1 + \mu^2 \cdot N_v^2} \right]^{-1};$$

$$C\tau_v = \left[\sqrt{1 + \mu^2 \cdot N_v^2} \right]^{-1} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2 \cdot (1 - \nu)};$$

$$CB_v = \left[\sqrt{1 + \mu^2 \cdot N_v^2} \right]^{-1} \cdot \frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{2 \cdot (1 - \nu^2)};$$

$$N_v = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}.$$

С учетом того, что $\nu < 1$, а $\nu^2 \ll 1$, то последние четыре выражения, зависящие от коэффициента Пуассона ν , можно разложить в биномиальные ряды. При этом, ограничиваясь первыми тремя членами в разложениях, получаем:

$$CF_{\nu} \rightarrow 2 \cdot \mu_1 + 1/2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \nu + 2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_{\Sigma} \cdot \nu^2 + \dots; \quad (2)$$

$$C\tau_{\nu} \rightarrow \mu_1 + (-\mu_1 + 1/4 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2) \cdot \nu + [-1/2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 + \mu_1 \cdot \mu_{\Sigma} - 4 \cdot \mu_1] \cdot \nu^2 + \dots; \quad (3)$$

$$CB_{\nu} \rightarrow 3 \cdot \mu_1 + (-6 \cdot \mu_1 + 3/4 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2) \cdot \nu + [-3/2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 + 3 \cdot \mu_1 \cdot \mu_{\Sigma} + 3 \cdot \mu_1] \cdot \nu^2 + \dots; \quad (4)$$

$$N_{\nu} \rightarrow 1/2 - 1/2 \cdot \nu - 1/2 \cdot \nu^2 - \dots, \quad (5)$$

$$\text{где } \mu_1 = (4 + \mu)^{-0.5};$$

$$\mu_2 = \frac{\mu^2}{1 + 1/4 \cdot \mu^2};$$

$$\mu_{\Sigma} = (1/8 \cdot \mu_2 + 3/32 \cdot \mu_2^2).$$

3. Определение давления в месте контакта вязкоупругой среды с жестким телом

Исходя из соотношений $\mu < 1$ и $\mu^2 \ll 1$, можно, не уменьшая точности получаемых решений, оставить первые два члена в разложениях (2) – (4). Тогда после соответствующей подстановки и последовательного выполнения прямого и обратного интегрального преобразования Лапласа-Карсона получено такое выражение, позволяющее найти распределение давления в области действия контакта:

$$P(x) = \frac{2 \cdot \mu_1 \cdot F_{cn}(t) + 1/2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \left(-F_{cn}(t) + 3/2 \int_0^t Z_{0.5}(t-s) dF_{cn}(s) \right)}{\pi \cdot (x+a)^{\theta_1} \cdot (b-x)^{\theta_2}} +$$

$$+ \left\{ \mu_1 \cdot \tau_0(t) (-\mu_1 + 1/4 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2) \cdot \left[-\tau_0(t) + 3/2 \int_0^t Z_{0.5}(t-s) \tau_0(s) \right] \right\} \cdot \frac{(a+b) \cdot \theta_2 - (a+x)}{(x+a)^{\theta_1} \cdot (b-x)^{\theta_2}} +$$

$$+ \left\{ 3 \cdot \mu_1 + (-6 \cdot \mu_1 + 3/4 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2) \cdot [-1 + 3/2 \cdot Z_{0.5}(t)] \right\} \cdot B \times$$

$$\times \frac{(a+b)^2 \cdot (0,25 - \theta^2) + 2 \cdot x \cdot [(a+b) \cdot \theta_2 - (a+x)]}{2 \cdot R \cdot (x+a)^{\theta_1} \cdot (b-x)^{\theta_2}}. \quad (6)$$

Выражение (6) записано для общего случая, а именно, когда усилие F_{cn} и адгезионная составляющая силы трения τ_0 зависят от времени. Если же данные величины можно принять как константы, то уравнение (6) упростится, то есть исчезнут интегралы, по аналогии со слагаемым, включающим объёмный модуль упругости B

$\left(B = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \right)$. Необходимо также ввести следующее замечание: при малых значениях аргумента функции связной ползучести Z_{ζ} , например при $\zeta \leq 0,5$, что и получено для уравнения (6), функцию Z_{ζ} можно представить в виде [2]:

$$Z_{\zeta} \approx 1 - \zeta \cdot \omega,$$

$$\text{где } \omega = \frac{1 - 2 \cdot \nu}{1 + \nu}.$$

В этом случае необходимость проведения экспериментов по отысканию функций связной ползучести отпадает (если известен коэффициент Пуассона ν) и значение Z_{ζ} можно определить по формуле:

$$Z_{\zeta} = 1 - \zeta \cdot \omega(t). \quad (7)$$

С учетом сделанных замечаний уравнение (6) можно представить так:

$$\begin{aligned}
 P(x, t) = & \frac{F_{cn} \cdot [2 \cdot \mu_1 + 1/2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \omega_1(t)]}{\pi \cdot (x+a)^{\theta_1} \cdot (b-x)^{\theta_2}} + \\
 & + \tau_0 \cdot [\mu_1 + (-\mu_1 + 1/4 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2) \cdot \omega_1(t)] \cdot \frac{(a+b) \cdot \theta_2 - (a+x)}{(x+a)^{\theta_1} \cdot (b-x)^{\theta_2}} + \\
 & + B \cdot [3 \cdot \mu_1 + (-6 \cdot \mu_1 + 3/4 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2) \cdot \omega_1(t)] \times \\
 & \times \frac{(a+b)^2 \cdot (0,25 - \theta^2) + 2 \cdot x \cdot [(a+b) \cdot \theta_2 - (a+x)]}{2 \cdot R \cdot (x+a)^{\theta_1} \cdot (b-x)^{\theta_2}}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

где $\omega_1(t) = 1/2 + \omega(t)$.

Перед началом отыскания давления, возникающим под штампом, по формуле следует найти граничные точки контакта a и b . При этом первоначальное приближение для упругой задачи может быть найдено из системы уравнений:

$$(a+b)^2 = \frac{4 \cdot R \cdot F_{cn}}{3 \cdot \pi \cdot B \cdot (1/4 - \theta^2)} \cdot \frac{(1-v^2)}{(1-2 \cdot v)}; \quad (9)$$

$$\frac{a-b}{2} = (a+b) \cdot \theta + \frac{R \cdot \tau_0}{3 \cdot B} \cdot (1+v). \quad (10)$$

Проведем анализ напряженного состояния для материала, экспериментально полученные характеристики которого имеют следующие значения: продольная деформация – $\varepsilon_x = (0,354; 0,370; 0,375; 0,393; 0,400; 0,409; 0,415; 0,419; 0,422)$; поперечная деформация – $\varepsilon_y = (0,115; 0,123; 0,125; 0,134; 0,137; 0,141; 0,144; 0,146; 0,148)$; время снятия экспериментальных данных – $t_e = (1; 5; 10; 50; 90; 120; 180; 240; 300)$ мин. Следует напомнить, что коэффициент Пуассона представляет собой отношение поперечной деформации к продольной. Для того чтобы выполнить расчет давления по формуле (8), произведем аппроксимацию коэффициента Пуассона с использованием обобщенной функции регрессии linfit из математического пакета Mathcad, что позволит оптимизировать вычислительный процесс [3, 4]. В результате аппроксимации получаем следующее выражение:

$$v(t) = K_{F_0} \cdot \exp(a \cdot t) + K_{F_1} \cdot t^n - K_{F_2} \cdot \log(t)^{n1}, \quad (11)$$

где $K_{F_0} = 0,327$;

$K_{F_1} = -6,399 \cdot 10^{-4}$;

$K_{F_2} = -8,62 \cdot 10^{-3}$;

$a = 0,0003$ $n = 0,75$; $n1 = 1,65$.

Порядок получения формулы (11) приведен в программе 1, а сравнительные результаты экспериментальных данных с аппроксимирующей зависимостью по формуле (11) представлены на рис. 1.

Программа 1

Начало программы 1.

$t_e :=$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 50 \\ 90 \\ 120 \\ 180 \\ 240 \\ 300 \end{pmatrix}$	$\varepsilon_x :=$	$\begin{pmatrix} 0.354 \\ 0.370 \\ 0.375 \\ 0.393 \\ 0.400 \\ 0.409 \\ 0.415 \\ 0.419 \\ 0.422 \end{pmatrix}$	$\varepsilon_y :=$	$\begin{pmatrix} 0.115 \\ 0.123 \\ 0.125 \\ 0.134 \\ 0.137 \\ 0.141 \\ 0.144 \\ 0.146 \\ 0.148 \end{pmatrix}$
----------	--	--------------------	---	--------------------	---

$$v_e := \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad v_e^T = (0.325 \quad 0.332 \quad 0.333 \quad 0.341 \quad 0.343 \quad 0.345 \quad 0.347 \quad 0.348 \quad 0.351)$$

$$a := 0.0003 \quad n := 0.75 \quad n1 := 1.65$$

$$F1(t) := \begin{pmatrix} \exp(a \cdot t) \\ t^n \\ -\log(t)^{n1} \end{pmatrix} \quad K_F := \text{linf it}(t_e, v_e, F1) \quad K_F = \begin{pmatrix} 0.327 \\ -6.399 \times 10^{-4} \\ -8.62 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$t := 1, 2, \dots, 300 \quad i := 0..8$$

$$v(t) := K_{F0} \cdot \exp(a \cdot t) + K_{F1} \cdot t^n - K_{F2} \cdot \log(t)^{n1}$$
 Конец программы 1.

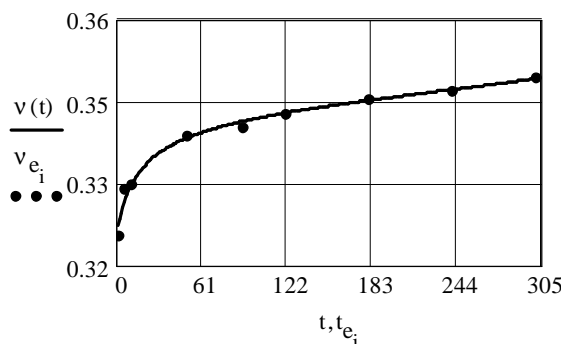


Рис. 1 □ Сравнительные результаты экспериментальных данных с аппроксимирующей зависимостью по формуле (11)

Выполнив преобразования для системы уравнений (9) и (10) по аналогии с тем, как была получена формула (8), можно записать такую систему уравнений для отыскания граничных точек контакта a и b в случае вязкоупругой задачи:

$$(a(t) + b(t))^2 = \frac{4 \cdot R \cdot F_{cn}}{3 \cdot \pi \cdot B} \cdot \left[\frac{1}{at\mu} + \left(\frac{4 \cdot \mu \cdot at}{\mu 4 \cdot at\mu \cdot at\mu 1} - \frac{8 \cdot \pi^2}{at\mu 1} \right) \cdot \omega 1(t) \right]; \quad (12)$$

$$\frac{a(t) - b(t)}{2} = (a(t) + b(t)) \cdot \left[\frac{at}{\pi} - \frac{\mu}{2 \cdot \pi \cdot \mu 4} \cdot \omega 1(t) \right] + \frac{R \cdot \tau_0}{2 \cdot B} \cdot [1 - 0,5 \cdot \omega(t)], \quad (13)$$

где $at = \arctg(0,5 \cdot \mu)$, $at\mu = 1/4 - 1/\pi^2 \cdot at^2$, $at\mu 1 = -\pi^2 + 4 \cdot at^2$, $\mu 4 = 1 + 1/4 \cdot \mu^2$.

Для решения задачи возьмем следующие данные: $R = 4,5$ мм; $B = 35,46$ ГПа; $F_{cn} = 50 \cdot 10^6$ Н/м; $\tau_0 = 30$ МПа; $\mu = 0,8$.

Расчет давления по формуле (8) и граничных точек контакта по выражениям (12) и (13) приведен в программе 2, а результаты расчета представлены на рис. 3.

Программа 2

Начало программы 2.

$t := 1..300$

$v(t) := 0.327 \cdot \exp(3 \cdot 10^{-4} \cdot t) - 6.339 \cdot 10^{-4} \cdot t^{0.75} + 8.62 \cdot 10^{-3} \cdot \log(t)^{1.65}$

ГПа := 10^9 Па В := 35.46 ГПа

$R := 4.5 \text{ mm}$ $\tau_0 := 30 \cdot 10^6 \cdot \text{Pa}$ $\mu := 0.8$ $F_{cn} := 50 \cdot 10^6 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$ $at := a \tan(0.5 \cdot \mu)$ $at\mu := \frac{1}{4} - \frac{at^2}{\pi^2}$

$at\mu 1 := -\pi^2 + 4 \cdot at^2$ $\mu 4 := 1 + \frac{1}{4} \cdot \mu^2$ $\omega(t) := \frac{1 - 2 \cdot v(t)}{1 + v(t)}$ $\omega 1(t) := \frac{1}{2} + \omega(t)$ $i := 0..150$

$$tt_i := 1 + i \cdot \frac{300}{150} \quad vt_i := v(tt_i) \quad \omega t_i := \omega(tt_i) \quad \omega t_{1i} := \omega_1(tt_i) \quad a := 3 \text{ mm} \quad b := 5 \text{ mm}$$

Given

$$(a+b)^2 = \frac{4 \cdot R \cdot F_{cn}}{3 \cdot \pi \cdot B} \cdot \left[\frac{1}{at\mu} + \left(\frac{4 \cdot \mu \cdot at}{\mu^4 \cdot at\mu \cdot at\mu_1} - \frac{8 \cdot \pi^2}{at\mu_1} \right) \cdot \omega t_{1i} \right]$$

$$\frac{a-b}{2} = (a+b) \cdot \left(\frac{at}{\pi} - \frac{\mu}{2 \cdot \pi \cdot \mu^4} \cdot \omega t_{1i} \right) + \frac{R \cdot \tau_0}{2 \cdot B} \cdot (1 - 0.5 \cdot \omega t_i)$$

$$M1_i := \text{Find}(a, b)$$

$$MM := \begin{cases} MM_0 \leftarrow \text{augment}(M1_0, M1_1) \\ \text{for } ii \in 1..149 \\ MM_{ii} \leftarrow \text{augment}(MM_{ii-1}, M1_{ii+1}) \end{cases}$$

$$a := (MM^T)^{0)} \quad b := (MM^T)^{1)}$$

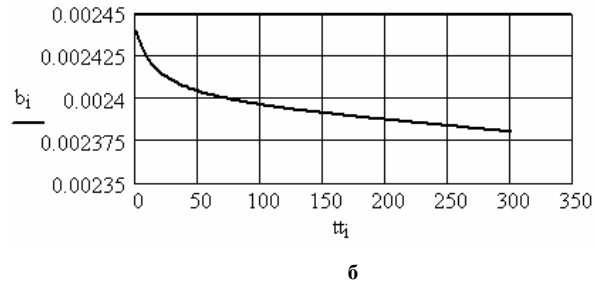
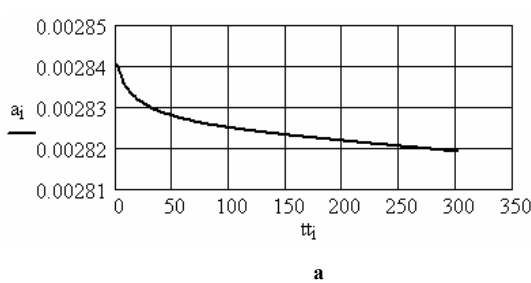


Рис. 2 □ Графики изменения граничных точек контакта во времени:
а – начальной точки контакта;
б – конечной точки контакта

$$v_c := \text{mean}(vt) \quad v_c = 0.345 \quad N_v := \frac{1 - 2 \cdot v_c}{2 - 2 \cdot v_c} \quad \theta := \frac{1}{\pi} \cdot a \tan(\mu \cdot N_v) \quad \theta = 0.06$$

$$\theta_1 := 0.5 + \theta \quad \theta_2 := 0.5 - \theta \quad L_i := a_i + b_i \quad j := 0..20 \quad dx_i := \frac{L_i}{20} \quad x_{i,j} := -a_i + j \cdot dx_i$$

$$\mu_1 := (4 + \mu)^{-0.5} \quad \mu_2 := \frac{\mu^2}{1 + 0.25 \cdot \mu^2} \quad \mu_\Sigma := \left(\frac{1}{8} \cdot \mu_2 + \frac{3}{32} \cdot \mu_2^2 \right)$$

$$Zn_{i,j} := (x_{i,j} + a_i)^{\theta_1} \cdot (b_i - x_{i,j})^{\theta_2} \quad ZnS := \text{submatrix}(Zn, 0, 150, 1, 19) \quad jj := 0..18$$

$$P1_{i,jj} := \frac{F_{cn} \cdot (2 \cdot \mu_1 + 0.5 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \omega t_{1i})}{\pi \cdot ZnS_{i,jj}}$$

$$P2_{i,jj} := \tau_0 \cdot [\mu_1 + (-\mu_1 + 0.25 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2) \cdot \omega t_{1i}] \cdot \frac{(a_i + b_i) \cdot \theta_2 - (a_i + x_{i,jj})}{ZnS_{i,jj}}$$

$$P3_{1i} := B \cdot \left[3 \cdot \mu_1 + (-6 \cdot \mu_1 + 0.75 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2) \cdot \omega t_{1i} \right]$$

$$P3_{2i,jj} := \frac{(a_i + b_i)^2 \cdot (0.25 - \theta^2) + 2 \cdot x_{i,jj} \cdot [(a_i + b_i) \cdot \theta_2 - (x_{i,jj} + a_i)]}{2 \cdot R \cdot ZnS_{i,jj}} \quad P3_{i,jj} := P3_{1i} \cdot P3_{2i,jj}$$

$$P_{i,jj} := (P1_{i,jj} + P2_{i,jj} + P3_{i,jj}) \cdot 10^{-9}$$

Конец программы 2.

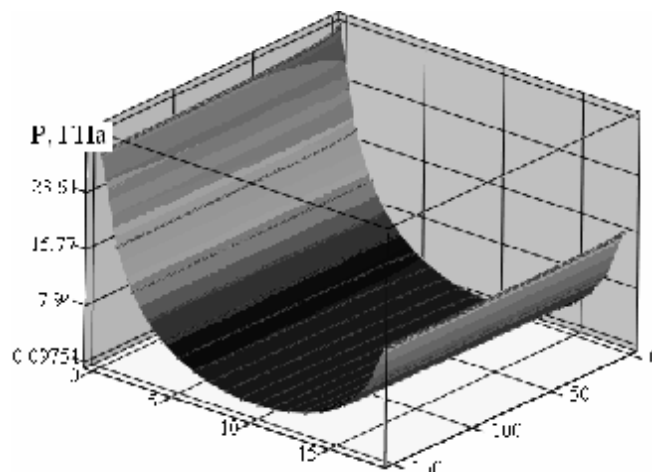


Рис. 3 □ Объемный график изменения давления в зоне контакта

Аналогичным образом можно получить результаты и для других исходных данных.

Выводы

1. Разработана методика перехода от упругой контактной задачи к вязкоупругой.
2. Построена математическая модель для анализа напряженного состояния в зоне контакта вязкоупругой среды с жестким телом.
3. Разработана программа на базе математического пакета Mathcad для аппроксимации экспериментальных данных.
4. Разработана программа на базе математического пакета Mathcad для параметров, входящих в задачу контакта твердой сферы с вязкоупругой средой, позволяющая оптимизировать напряженное состояние в зоне контакта, что дает возможность увеличивать рабочий интервал функционирования рассматриваемого объекта.

Литература

1. Анализ деформированно-напряженного состояния при скольжении жесткого тела со сферической поверхностью контакта по наклонной поверхности вязкоупругой среды / А.И. Буря, И.М. Кузьяев, М.Е. Казаков и др. // Труды 8-го Международного симпозиума по фрикционным изделиям и материалам. ЯРОФИ-2010, 2010. – С. 23-28.
2. Колтунов М.А. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов / Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. – М.: Машиностроение, 1983. – 239 с.
3. Ситар В.І. Побудова елементів САПР при моделюванні обладнання хімічної промисловості за допомогою пакета MathCAD: навч. посібн. [для студ. вищ. навч. закл.] / Ситар В.І., Бурмістр М.В., Кузьяев І.М. – Дніпропетровськ, УДХТУ, 2005. – 306 с.
4. Кирьянов Д. Самоучитель Mathcad 11 / Кирьянов Д. – С.Пб.: БХВ – Петербург, 2003. – 560 с.

Надійшла 14.01.2010