

**Дьяченко Н.Н.,
Манько Н.И.-В.**

Запорожский национальный университет,
г. Запорожье, Украина
E-mail: dyachenko-nata@mail.ru

**ПРИБЛИЖЕННО АНАЛИТИЧЕСКОЕ
РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ
ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ИЗНАШИВАНИЯ
ТОНКОГО УПРУГОГО СЛОЯ ПРИ
ФИКСИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ КОНТАКТА**

УДК 539.3

Получено решение задачи о линейном изнашивании тонкой упругой полосы при скольжении по ней штампа с плоским основанием. И.Г. Горячевой [1] предложен пошаговый метод дискретизации времени, где на каждом шаге система интегральных уравнений решается численно. В данной работе исследуется вопрос существования и единственности решения каждой из таких систем, для которых найдены приближенно аналитические решения. Проведен анализ распределения давлений и толщины изнашиваемой полосы в разные промежутки времени: на стадии приработки и на стадии установившегося износа. Проведен сравнительный анализ с известным решением из работы [1].

Ключевые слова: плоская контактная задача, тонкая упругая полоса, изнашивание, метод последовательных приближений, метод редукции.

Введение

В работе решается задача об изнашивании упругой тонкой полосы, лежащей на плоском основании, в результате скольжения по ней штампа с плоским основанием. Под изнашиванием понимают удаление материала с поверхности трения вследствие ее разрушения, проявляющегося в постепенном изменении формы и размеров взаимодействующих тел [1, 2]. Износ контактирующих поверхностей – одна из основных проблем машиностроения. Математической постановкой и решением износоконтактных задач занимается трибология.

Впервые задача расчета износа абсолютно жестких контактирующих тел была поставлена А.С. Пронниковым [3]. Наибольший вклад в теорию решения износоконтактных задач внес Л.А. Галин [4]. Дальнейшее развитие эта проблема и методы ее решения получили в работах [2, 5 - 8]. Обзор исследований в этой области содержится в [2].

В результате теоретических исследований [7] выведены уравнения износа, в которых выражается зависимость скорости износа от давления линейного и степенного вида. В данной работе рассмотрена линейная зависимость.

В монографии [1] выведены интегральные уравнения плоской контактной задачи с учетом износа тонкого слоя при фиксированной области контакта и предложен пошаговый метод (по времени) их решения. На каждом шаге решается система интегральных уравнений путем сведения ее к системе линейных алгебраических уравнений относительно дискретизированной функции давления. Однако исследование вопроса существования и единственности решения указанной системы на каждом шаге по времени не рассматривается.

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решения системы интегральных уравнений на каждом временном шаге, нахождение аналитического и приближенного решения на этих шагах.

Поскольку тонкая полоса, подверженная износу, моделирует покрытие Винклеровского типа, то решение данной задачи на каждом временном шаге получено с помощью тех же методов, которыми решалась контактная задача с учетом шероховатости поверхности в работе [9]. Для этого на каждом шаге система интегральных уравнений сведена к операторному уравнению Фредгольма второго рода. Доказано, что оператор этого уравнения является сжимающим на множестве, которому принадлежит решение. Аналитическое решение представлено степенным рядом с неопределенными коэффициентами, которые можно найти из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Доказана возможность применения к указанной системе метода редукции и метода последовательных приближений.

Проведен анализ числовых результатов по распределению давления на площадке контакта и толщины тонкой полосы в различные временные промежутки.

1. Постановка задачи и ее интегральные уравнения

Рассмотрим задачу в следующей постановке [1, 2, 7]. Предположим, что упругая полоса начальной толщины h_0 , лежит на упругом основании (рис. 1). Возможны два случая закрепления полосы ($y = h_0$):

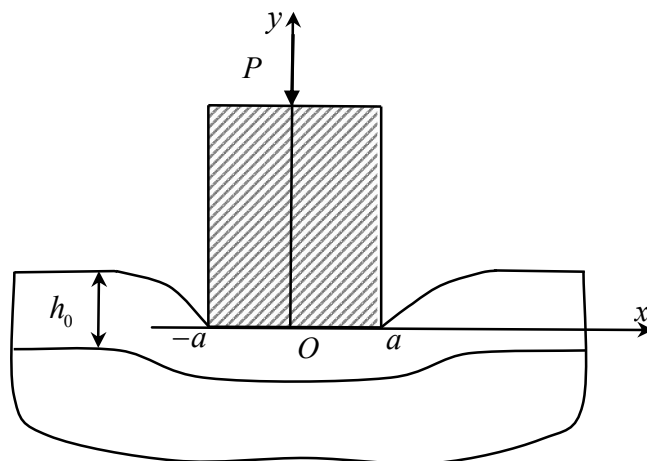


Рис. 1 – Схема контакта штампа с упругим слоем

1. Полоса лежит на жестком основании без трения (задача 1).
2. Полоса жестко закреплена на основании (задача 2).

Далее предположим, что в верхнюю границу полосы постоянной силой P вдавливается штамп с плоским основанием полуширины a (рис. 1). Полосу будем считать тонкой, так что $h_0/a \ll 1$. Штамп скользит в направлении оси Oz , в результате чего происходит износ полосы, и ее толщина $h(x, t)$ изменяется со скоростью $\partial h(x, t)/\partial t$, зависящей от контактного давления $p(x, t)$ по линейному закону:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -K_v \frac{p(x, t)}{p^*}, \quad (1)$$

где K_v – коэффициент износа;

p^* – некоторое давление [1, 7].

Как отмечено в [7], если считать, что касательные напряжения на площадке контакта действуют в направлении движения штампа и отсутствуют в направлении оси Ox , то есть $\tau_{xy} = 0$, то компонента τ_{zy} тангенциальных напряжений не влияет на распределение контактных давлений, которые находятся из решения плоской контактной задачи. Однако, компонента τ_{zy} оказывает влияние на скорость процесса изнашивания, что учитывается с помощью коэффициента K_v [7].

Предположим, что смещение упругой полосы удовлетворяет условию $\partial h(x, t)/\partial x \ll 1$. В таком случае уравнение для определения давления в любой момент времени имеет вид [1, 2, 7]:

$$\left[h(x, t) - h(0, t) \right] - A \frac{1}{E_1^*} \left[h(x, t) p(x, t) - h(0, t) p(0, t) \right] + \frac{1}{\pi E_2^*} \int_{-a}^a p(x', t) \ln \left| \frac{x' - x}{x'} \right| dx' = 0, \quad (2)$$

где $E_i^* = \frac{E_i}{2(1-\nu_i^2)}$, E_i, ν_i – модуль упругости и коэффициент Пуассона полосы ($i = 1$) и ос-

нования ($i = 2$), $n = \frac{E_1^*}{E_2^*}$;

$$\kappa_i = 3 - 4\nu_i;$$

в предположении, что $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ значение A для задачи 1 – $A = 0,5$, для за-

$$\text{дачи 2 – } A = \frac{3(1-n)(\kappa-1)(2-n+n\kappa)}{(\kappa+1)^2}.$$

В начальный момент времени $h(x, t) = h_0$ при всех $x \in [-a; a]$, при этом второе и третье слагаемые левой части (2) приближенно характеризуют перемещения поверхности за счет наличия тонкой полосы, ведущей себя как покрытие Винклеровского типа с коэффициентом пропорциональности $k = Ah_0/E_1^*$, и перемещение упругого основания соответственно. В произвольный момент времени физическая интерпретация является обобщением вышеуказанной для полосы переменной толщины $h(x, t)$ [1, 2, 7].

Из уравнения (1) следует, что толщину полосы в произвольный момент времени можно определить из равенства

$$h(x, t) = h_0 - K_v \int_0^t \frac{p(x, t')}{P^*} dt'. \quad (3)$$

Кроме того, имеет место условие равновесия:

$$\int_{-a}^a p(x', t) dx' = P. \quad (4)$$

2. Метод решения

2.1. Пошаговый по времени метод решения системы интегральных уравнений данной задачи

Для решения уравнений (2) - (4) в монографии [1] предложен *пошаговый метод по времени*. Шаг по времени $\Delta\tau$ выбирается так, чтоб в пределах каждого интервала $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, где $\tau_0 = 0$, $\tau_{k+1} = \tau_k + \Delta\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$ можно было пренебречь перераспределением давления на площадке контакта и износом поверхности. Введем обозначения:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \tau = t \frac{K_v}{a}, \quad \bar{P} = \frac{P}{aE_2^*}, \quad \bar{h}_0 = \frac{h_0}{a}, \quad \bar{h}(\xi, \tau) = \frac{1}{a} h\left(\xi a, \tau \frac{a}{K_v}\right),$$

$$\bar{A} = \frac{A}{n}, \quad \bar{p}(\xi, \tau) = \frac{1}{E_2^*} p\left(\xi a, \tau \frac{a}{K_v}\right), \quad \bar{f}(\xi) = \frac{1}{a} f(\xi a).$$

Тогда система для определения распределения давления в различные моменты дискретного времени при изнашивании поверхностного слоя:

$$\bar{h}_{k+1}(\xi) = \bar{h}_k(\xi) - \frac{\bar{p}_k(\xi)}{\bar{P}^*} \Delta\tau, \quad \bar{h}_0(\xi) = \bar{h}_0, \quad (5)$$

$$\bar{h}_k(\xi) - \bar{h}_k(0) - \bar{A} [\bar{h}_k(\xi) \bar{p}_k(\xi) - \bar{h}_k(0) \bar{p}_k(0)] + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{p}_k(\xi') \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi' = 0, \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 \bar{p}_k(\xi') d\xi' = \bar{P}. \quad (7)$$

2.2. Нулевой шаг по времени

2.2.1. Сведение системы интегральных уравнений к операторному уравнению Фредгольма второго рода

Исходя из (5) и (7), найдем распределение нормального давления в момент времени $\tau_0 = 0$. Оно удовлетворяет системе:

$$\bar{A} \bar{h}_0 \bar{p}_0(\xi) = \bar{A} \bar{h}_0 \bar{p}_0(0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{p}_0(\xi') \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi', \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \bar{p}_0(\xi') d\xi' = \bar{P}. \quad (9)$$

Обозначим:

$$\alpha_0 = 1 - \overline{A\bar{h}_0}, \quad P_0(\xi) = \bar{p}_0(\xi) - \bar{p}_0(0), \quad w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi',$$

выразим из второго уравнения системы (8)-(9) значение $\bar{p}_0(0)$:

$$\bar{p}_0(0) = \frac{\bar{P}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_0(\xi') d\xi'. \quad (10)$$

Это дает возможность свести систему интегральных уравнений к одному интегральному уравнению:

$$P_0(\xi) = \alpha_0 P_0(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| P_0(\xi') d\xi' - \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 P_0(\xi') d\xi' + \frac{\bar{P}}{2} w(\xi) \quad (11)$$

Введем операторы:

$$[Af](\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| f(\xi') d\xi', \quad [Bf](\xi) = \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi',$$

$$[Lf](\xi) = [(A - B)f](\xi). \quad (12)$$

Интегральное уравнение (11) преобразуем к операторному уравнению Фредгольма второго рода:

$$P_0(\xi) = [(\alpha_0 I + L)P_0](\xi) + \frac{\bar{P}}{2} w(\xi). \quad (13)$$

Покажем, что решением уравнения (13) может быть только непрерывная функция. Предположим, что это не так, а функция $P_0(\xi)$ на концах отрезка $[-1; 1]$ имеет интегрируемую степенную особенность вида $(\xi \pm 1)^{-\lambda}$, $0 < \lambda < 1$. Тогда функция $[BP_0](\xi)$ не будет иметь особенностей в точках $\xi = \pm 1$. Интегральный оператор A имеет ядро с особенностью вида $\ln|\xi \pm 1|$ в этих точках, однако значение интеграла $\int_{-1}^1 \ln|\xi' \pm 1| (\xi' \pm 1)^{-\lambda} d\xi'$, а вместе с ним и функция $[AP_0](\xi)$, не будут иметь осо-

бенностей. Таким образом, уравнение $(1 - \alpha_0)P_0(\xi) = [LP_0](\xi) + \frac{\bar{P}}{2} w(\xi)$, эквивалентное уравнению (13), в левой части будет содержать особенность указанного типа в точках $\xi = \pm 1$, а в правой части уравнения особенности не будет. Значит, предположение не выполняется, что доказывает требуемое.

Вследствие доказанного выше, линейные операторы (12) будем рассматривать на пространстве $C[-1; 1]$ функций, непрерывных на отрезке $[-1; 1]$. Для исследования вопроса существования и единственности решения уравнения (13) и уравнений, аналогичных ему на следующих временных шагах, изучим свойства операторов (12).

2.2.2. Свойства линейных операторов на нулевом по времени шаге

Если функция $f(\xi)$ непрерывна на отрезке $[-1; 1]$, то есть $f(\xi) \in C[-1; 1]$, тогда функция $g(\xi) = [Af](\xi)$ непрерывна в любой точке $\xi \in [-1; 1]$. Действительно, для $\xi \in (-1; 1)$ имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} |\Delta g(\xi)| &= \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left| \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi - \Delta\xi}{\xi' - \xi} \right| f(\xi') d\xi' \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \max_{\xi \in [-1; 1]} |f(\xi)| \cdot \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \left(\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_{-1}^{\xi - \varepsilon_1} \left| \ln \left| 1 - \frac{\Delta\xi}{\xi' - \xi} \right| \right| d\xi' + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\xi + \varepsilon_2}^1 \left| \ln \left| 1 - \frac{\Delta\xi}{\xi' - \xi} \right| \right| d\xi' \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично для $\xi = \pm 1$:

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow \pm 0} |\Delta g(\pm 1)| \leq \frac{1}{\pi} \max_{\xi \in [-1; 1]} |f(\xi)| \cdot \lim_{\Delta\xi \rightarrow \pm 0} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1+\varepsilon}^1 \ln \left| 1 - \frac{\Delta\xi}{\xi' + 1} \right| d\xi' \right) = 0.$$

Значит, $A : C[-1; 1] \rightarrow C[-1; 1]$.

Отсюда следует, что функция $w(\xi) = [Ae](\xi)$, $e(\xi) \equiv 1$ является непрерывной на отрезке $[-1; 1]$, значит, $B : C[-1; 1] \rightarrow C[-1; 1]$. Таким образом, для оператора:

$$\begin{aligned} [Lf](\xi) &= [(A - B)f](\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| f(\xi') d\xi' - \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi' = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi'' - \xi}{\xi''} \right| d\xi'' \right] f(\xi') d\xi' \end{aligned}$$

имеем $L : C[-1; 1] \rightarrow C[-1; 1]$.

Оценим норму оператора L . Для этого в пространстве $C[-1; 1]$ рассмотрим норму функции:

$$\begin{aligned} \|Lf\| &= \max_{\xi \in [-1; 1]} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi'' - \xi}{\xi''} \right| d\xi'' \right] f(\xi') d\xi' \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|f\| \cdot \max_{\xi \in [-1; 1]} \left| \int_{-1}^1 \left[\ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi'' - \xi}{\xi''} \right| d\xi'' \right] d\xi' \right|. \end{aligned}$$

С помощью прикладного аналитического пакета Maple получено, что значение максимума не превосходит 2,6, откуда следует, что

$$\|L\| \leq \frac{2,6}{\pi}. \quad (14)$$

Исследуем оператор $\alpha_0 I + L$, где $[If](\xi) = f(\xi)$ для всех $f(\xi) \in C[-1; 1]$. Очевидно, что $I : C[-1; 1] \rightarrow C[-1; 1]$, поэтому $\alpha_0 I + L : C[-1; 1] \rightarrow C[-1; 1]$.

Из постановки задачи следует неотрицательность и четность функции нормального давления на отрезке $[-1; 1]$ в каждый момент времени. Кроме того, в любой момент времени поставленная задача аналогична плоской контактной задаче о вдавлении штампа с плоским основанием в упругую шероховатую полосу без учета ее износа, изученной в [7, 9]. Анализируя решение указанной задачи, приходим к выводу о возрастании функции давления на площадке контакта, за исключением, возможно, малых окрестностей концов этой площадки, то есть о возрастании на отрезке $[0; 0,9]$. При этом, наименьшее значение функции давления достигается в точке $\xi = 0$, поэтому функция $P_0(\xi) = \bar{p}_0(\xi) - \bar{p}_0(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) в точке $\xi = 0$ принимает значение 0.

Введем множество M неотрицательных, четных на отрезке $[-1; 1]$, возрастающих на отрезке $[0; 0,9]$ функций $f(x)$ пространства $C[-1; 1]$, для которых $f(0) = 0$. Исследуем сжимаемость отображения $\alpha_0 I + L$ на множестве M . Вследствие теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами [10] проведем первоначально оценивания на множестве $M_1 \subset M$

многочленов. Очевидно, что такие многочлены должны иметь вид $R(\xi) = \sum_{k=1}^n C_k \xi^{2k}$.

Для всех степенных функций $s_k(\xi) = \xi^{2k} \in M_1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) имеет место неравенство: $[Ls_k](\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in [-1; 1]$. Откуда:

$$\|(\alpha_0 I + L)s_k\| = \max_{\xi \in [-1;1]} |\alpha_0 s_k(\xi) - [-Ls_k](\xi)| \leq \max_{\xi \in [-1;1]} (\alpha_0 s_k(\xi)) = \alpha_0 \|s_k\|.$$

Тогда многочлен $R(\xi) = \sum_{k=1}^n C_k \xi^{2k} \in M_1$ можно представить разностью $R(\xi) = R^+(\xi) - R^-(\xi)$, где $R^+(\xi) = \sum_{C_k \geq 0} C_k \xi^{2k}$, $R^-(\xi) = \sum_{C_k < 0} |C_k| \xi^{2k}$. Поскольку $R(\xi) \in M_1$, то на отрезке $[-1;1]$ имеют место неравенства: $R(\xi) \geq 0$, $R^+(\xi) \geq R^-(\xi)$. Из физического смысла оператора A следует, что на этом отрезке имеют место неравенства

$$[[AR^+](\xi)] \geq [[AR^-](\xi)], \quad [AR^\pm](\xi) \leq 0, \quad [Ae](\xi) \geq 0,$$

где $e(\xi) \equiv 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} [LR](\xi) &= [AR^+](\xi) - [AR^-](\xi) - [BR](\xi) = \\ &= ([AR^+](\xi) - [AR^-](\xi)) - \frac{1}{2} [Ae](\xi) \cdot \int_{-1}^1 R(\xi') d\xi' \leq 0. \end{aligned}$$

Откуда получим:

$$\|(\alpha_0 I + L)R\| = \max_{\xi \in [-1;1]} |\alpha_0 R(\xi) - [-LR](\xi)| \leq \max_{\xi \in [-1;1]} (\alpha_0 R(\xi)) \leq \alpha_0 \|R\|. \quad (15)$$

Теперь проведем оценивания на множестве функций $f \in M$ пространства $C[-1;1]$. По теореме Вейерштрасса [10] для $\varepsilon = \frac{1 - \alpha_0}{4\alpha_0\pi + 5,2}$ можно найти многочлен $R \in M_1$ такой, что

$\|f - R\| < \varepsilon \|f\|$, тогда, используя (14) и (15), получим

$$\begin{aligned} \|(\alpha_0 I + L)f\| &\leq \|(\alpha_0 I + L)R\| + \|(\alpha_0 I + L)(f - R)\| \leq \alpha_0 \|R\| + (\alpha_0 + \|L\|)\|f - R\| \leq \\ &\leq \alpha_0 \|f\| + \left(2\alpha_0 + \frac{2,6}{\pi}\right) \|f - R\| \leq \frac{1 + \alpha_0}{2} \|f\|, \end{aligned}$$

то есть

$$\|(\alpha_0 I + L)f\| \leq q_0 \|f\|, \quad q_0 = \frac{1 + \alpha_0}{2}. \quad (16)$$

Поскольку полоса предполагается тонкой, то $\bar{A}\bar{h}_0 < 1$, следовательно $0 < \alpha_0 < 1$, а вместе с тем и $0 < q_0 < 1$. Таким образом, оператор $\alpha_0 I + L$ является сжимающим на множестве M .

2.2.3. Аналитическое решение операторного уравнения на нулевом по времени шаге (первый способ представления)

В силу свойств оператора $\alpha_0 I + L$ и принципа сжимающих отображений [11], уравнение (13) имеет единственное решение на множестве M , которое можно найти методом последовательных приближений и представить в виде ряда Неймана:

$$P_0(\xi) = \frac{\bar{P}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} [(\alpha_0 I + L)^r w](\xi) = \frac{\bar{P}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r C_r^k (\alpha_0)^{r-k} [L^k w](\xi). \quad (17)$$

Ряд (17) абсолютно сходится по норме пространства $C[-1;1]$.

Разложение образа степенной функции $\varphi(\xi) = \xi^{2N}$ ($N = 0, 1, 2, 3, \dots$) при действии оператора A имеет вид:

$$[A\varphi](\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{N,i} \xi^{2i},$$

где $\beta_{N,i} = -\frac{1}{\pi \cdot i \cdot (2N - 2i + 1)}$;

$i = 1, 2, 3, \dots$, а при действии оператора L – вид:

$$[L\varphi](\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} b_{N,i} \xi^{2i}, \quad (18)$$

где $b_{N,i} = \beta_{N,i} - \frac{1}{2N+1} \beta_{0,i}$;

$i = 1, 2, 3, \dots$

Поскольку $w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi' = [Ae](\xi)$, то

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{0,i} \xi^{2i}. \quad (19)$$

Подставим разложения (18) и (19) в ряд Неймана (17), получим:

$$P_0(\xi) = \frac{\bar{P}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r C_r^k(\alpha_0)^{r-k} \sum_{n_0=1}^{\infty} \beta_{0,n_0} \sum_{n_1=1}^{\infty} b_{n_0,n_1} \dots \sum_{n_{k-1}=1}^{\infty} b_{n_{k-2},n_{k-1}} \sum_{n_k=1}^{\infty} b_{n_{k-1},n_k} \xi^{2n_k}. \quad (20)$$

Формулой (20) выражается аналитическое решение уравнения (13).

Из соотношений (20) и (10) получаем представление функции нормального давления на нулевом шаге по времени:

$$\bar{p}_0(\xi) = \frac{\bar{P}}{2} + \frac{\bar{P}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r C_r^k(\alpha_0)^{r-k} \sum_{n_0=1}^{\infty} \beta_{0,n_0} \sum_{n_1=1}^{\infty} b_{n_0,n_1} \dots \sum_{n_{k-1}=1}^{\infty} b_{n_{k-2},n_{k-1}} \sum_{n_k=1}^{\infty} b_{n_{k-1},n_k} \left(\xi^{2n_k} - \frac{1}{2n_k + 1} \right).$$

Исходя из рекуррентной формулы (5), толщина полосы по истечении времени Δt определяется подстановкой последнего разложения в формулу:

$$\bar{h}_1(\xi) = \bar{h}_0 - \frac{\Delta t}{P^*} \bar{p}_0(\xi). \quad (21)$$

2.2.3. Аналитическое решение задачи на нулевом по времени шаге (второй способ представления)

Из представления (20) следует, что решение уравнения (13) имеет вид:

$$P_0(\xi) = \frac{\bar{P}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(0)} \xi^{2n}. \quad (22)$$

Подставим разложения (18), (19) и (22) в уравнение (13), получим:

$$\frac{\bar{P}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(0)} \xi^{2n} = \alpha_0 \frac{\bar{P}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(0)} \xi^{2n} + \frac{\bar{P}}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_j^{(0)} b_{j,n} \xi^{2n} + \frac{\bar{P}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{0,n} \xi^{2n}. \quad (23)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ξ в равенстве (23), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов степенного ряда (22):

$$\gamma_n^{(0)} = \alpha_0 \gamma_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(0)} b_{j,n} + \beta_{0,n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (24)$$

Решив систему (24), находим $\bar{p}_0(0)$ из соотношения (10), после чего, зная представление (22), получим разложение искомой функции нормального давления на нулевом шаге по времени:

$$\bar{p}_0(\xi) = \bar{p}_0(0) + P_0(\xi) = \frac{\bar{P}}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j^{(0)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(0)} \xi^{2j} \right).$$

Толщину полосы по истечении времени $\Delta\tau$ определим подстановкой последнего разложения в формулу (20):

$$\bar{h}_1(\xi) = \bar{h}_0 - \frac{\Delta\tau}{\bar{P}^*} \frac{\bar{P}}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j^{(0)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(0)} \xi^{2j} \right).$$

2.2.4. Приближенное решение операторного уравнения на нулевом по времени шаге

Для получения приближенного решения бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (24) будем решать *методом редукции*, то есть сведением ее к конечной системе из N уравнений. Поскольку система (24) эквивалентна уравнению (13), а неизвестные системы (24) являются коэффициентами степенного ряда (22), то возможность применения метода редукции к системе (24) равносильна возможности применения этого метода к операторному уравнению (13). А именно: все ряды в (23) и (17) заменяются частичными суммами до номера N , что эквивалентно замене степенного ряда (22) многочленом $\bar{\bar{P}}_0(\xi) = \frac{\bar{P}}{2} \sum_{n=1}^N \gamma_n^{(0)} \xi^{2n}$ степени N , а операторного уравнения (13) – приближенным

$$\bar{\bar{P}}_0(\xi) = \alpha_0 \bar{\bar{P}}_0(\xi) + [\bar{\bar{L}}\bar{\bar{P}}_0](\xi) + \frac{\bar{P}}{2} w(\xi), \quad (25)$$

где

$$[\bar{\bar{L}}\bar{\bar{P}}_0](\xi) = \frac{\bar{P}}{2} \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(0)} \sum_{n=1}^N b_{k,n} \xi^{2n} = [\Pi_N L P_0](\xi),$$

тут проектор $\Pi_N : C[-1;1] \rightarrow T_N[-1;1]$ отображает пространство непрерывных функций $C[-1;1]$ в пространство $T_N[-1;1]$ многочленов степени $2N$, при этом $[\Pi_N P_0](\xi) = \bar{\bar{P}}_0(\xi)$.

Условия возможности применения метода редукции, аналогичные приведенным в книге [12], имеют место и для операторных уравнений, выраженных через сжимающий оператор. Эти условия выполняются для операторного уравнения (13) на множестве M . Вследствие чего приходим к выводу [12], что при достаточно больших N приближенное уравнение (25) имеет решение $\left(\bar{\bar{P}}_0\right)_N^*(\xi) \in M_1$ и имеет место сходимость последовательности приближенных решений $\left\{ \left(\bar{\bar{P}}_0\right)_N^*(\xi) \right\} \subset M_1$ к точному $P_0^*(\xi) \in M$, то есть:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| P_0^* - \left(\bar{\bar{P}}_0\right)_N^* \right\| = 0.$$

При этом, решения приближенного уравнения (25) можно найти *методом последовательных приближений* [12].

2.3. Приближенно аналитическое решение задачи на k -ом по времени шаге

2.3.1. Сведение системы интегральных уравнений к операторному уравнению Фредгольма второго рода

Предположим, что решение на предыдущем шаге уже найдено, в том числе и функция ширины полосы:

$$\bar{h}_k(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i^{(k)} \xi^{2i}. \quad (26)$$

Необходимо решить систему интегральных уравнений (6) - (7).

Обозначим

$$\alpha_k = 1 - \overline{A\bar{h}_k}(0), \quad P_k(\xi) = \bar{p}_k(\xi) - \bar{p}_k(0), \quad H_k(\xi) = \bar{h}_k(\xi) - \bar{h}_k(0),$$

тогда из условия равновесия (7) выразим $\bar{p}_k(0)$:

$$\bar{p}_k(0) = \frac{\bar{P}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi', \quad (27)$$

подставим (27) в (6), получим интегральное уравнение:

$$P_k(\xi) = \alpha_k P_k(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| P_k(\xi') d\xi' - \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi' - \\ - \overline{A}H_k(\xi) \left[P_k(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi' \right] + \frac{\bar{P}}{2} w(\xi) - \frac{\bar{P}}{2} \overline{A}H_k(\xi) + H_k(\xi). \quad (28)$$

Введем линейные операторы:

$$[G_k f](\xi) = \overline{A}H_k(\xi) \left[f(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi' \right], \quad [L_k f](\xi) = [(L - G_k) f](\xi).$$

Функция

$$u_k(\xi) = \frac{\bar{P}}{2} w(\xi) - \frac{\bar{P}}{2} \overline{A}H_k(\xi) + H_k(\xi) \quad (29)$$

выражается через найденные ранее функции. Она становится свободным членом операторного уравнения Фредгольма второго рода, в которое преобразовывается интегральное уравнение (28):

$$P_k(\xi) = [(\alpha_k I + L_k) P_k](\xi) + u_k(\xi). \quad (30)$$

2.3.2. Свойства линейных операторов на k -ом по времени шаге

Аналогично нулевому шагу доказывается, что решение этого уравнения принадлежит пространству $C[-1;1]$. Поэтому операторы будем рассматривать на этом пространстве.

Очевидно, что $G_k : C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$, причем:

$$\|G_k f\| \leq \overline{A} \|H_k\| \cdot \left\| f(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi' \right\| \leq \overline{A} \|H_k\| \cdot \|f\|.$$

На множестве M пространства $C[-1;1]$ имеет место оценка, аналогичная (16), поэтому:

$$\|(\alpha_k I + L_k) f\| \leq \|(\alpha_k I + L) f\| + \|G_k\| \cdot \|f\| \leq \left(\frac{1 + \alpha_k}{2} + \overline{A} \|H_k\| \right) \cdot \|f\|.$$

Из физического смысла функции $h_k(\xi)$ в данной износоконтактной задаче с плоским штампом следует, что эта функция является четной на отрезке $[-1;1]$ и убывающей на отрезке $[0;1]$, что позволяет вычислить норму функции $H_k(\xi)$:

$$\|H_k\| = \max_{\xi \in [-1;1]} |h_k(\xi) - h_k(0)| = h_k(0) - h_k(1).$$

Откуда получим:

$$\|(\alpha_k I + L_k) f\| \leq \left(1 + \frac{\overline{A\bar{h}_k}(0)}{2} - \overline{A\bar{h}_k}(1) \right) \cdot \|f\|.$$

То есть

$$\|(\alpha_k I + L_k) f\| \leq q_k \cdot \|f\|, \quad q_k = 1 + \frac{\overline{A\bar{h}_k}(0)}{2} - \overline{A\bar{h}_k}(1). \quad (31)$$

Так как $0 < q_k < 1$, то оператор $\alpha_k I + L_k$ является сжимающим на множестве M .

2.3.3. Приближенно аналитическое решение задачи на k -ом по времени шаге

В силу принципа сжимающих отображений [11], уравнение (30) имеет единственное решение. Это решение можно представить рядом Неймана:

$$P_k(\xi) = \frac{\bar{P}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} [(\alpha_k I + L)^r u_k](\xi). \quad (32)$$

Из вида разложений (19) и (26) следует, что функция $u_k(\xi)$ вида (29) может быть представлена степенным рядом по четным степеням ξ . По таким же степеням ξ будет разложена функция $P_k(\xi)$ после преобразования ряда Неймана (32) с использованием (18). Таким же свойством будет обладать и функция нормального давления $\bar{p}_k(\xi)$.

Таким образом, решение уравнения (30) имеет вид:

$$P_k(\xi) = \frac{\bar{P}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(k)} \xi^{2n}. \quad (33)$$

Подставим (33) в (30), естественным образом придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(k)} = \alpha_0 \gamma_n^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(k)} b_{j,n} - \bar{A} \left[-\delta_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j^{(k)}}{2j+1} + \sum_{s=1}^{n-1} \delta_{n-s} \gamma_s^{(k)} \right] + \\ + \beta_{0,n} - \bar{A} \delta_n + \frac{2}{\bar{P}} \delta_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогично нулевому шагу обосновывается возможность применения метода редукции к системе (34) заменой ее на конечную систему. Решение конечной системы получаем методом последовательных приближений.

Из (27) и (33) находим искомую функцию нормального давления в момент времени τ_k :

$$\bar{p}_k(\xi) = \bar{p}_k(0) + P_k(\xi) = \frac{\bar{P}}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j^{(k)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(k)} \xi^{2j} \right).$$

Для перехода к следующему шагу необходимо найти функцию ширины полосы $\bar{h}_{k+1}(\xi)$, используя рекуррентную формулу (5) и последнее соотношение:

$$\bar{h}_{k+1}(\xi) = \bar{h}_k(\xi) - \frac{\Delta\tau}{\bar{p}^*} \bar{p}_k(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i^{(k)} \xi^{2i} - \frac{\Delta\tau}{\bar{p}^*} \frac{\bar{P}}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^{(k)}}{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(k)} \xi^{2n} \right].$$

Для получения приближенного решения бесконечной системы (34) применяем метод редукции, сводя ее к конечной, и метод последовательных приближений к полученной конечной системе. Обоснование возможности применения этих методов доказывается аналогично нулевому шагу.

3. Анализ числовых результатов

Числовые результаты получим для случая жесткого сцепления полосы с основанием (задача 2), когда модуль упругости полосы меньше модуля упругости основания, при $n = 0, 1$. Кроме того, выбраны следующие значения безразмерных исходных данных: $\bar{h}_0 = 10^{-2}$, $\bar{P} = 10^{-4}$, $\bar{p}^* = 16,7$ такие же, как в монографии [7].

На рис. 2 и 3 приведены графики распределения давления под штампом и профиля изношенной поверхности в разные моменты времени: $\tau = 0$ (метка 1), $\tau = 2$ (метка 2), $\tau = 5$ (метка 3), $\tau = 10$ (метка 4). В силу симметрии этих функций, они изображены на отрезке $[0, 1]$. На начальной стадии работы давление и форма изменяются со значительной скоростью. При этом, давление в центре площадки контакта увеличивается, а на границе – уменьшается, что приводит к выравниванию функции давления. В точках наибольшего давления, соответствующих границе площадки контакта, износ полосы наибольший. Вторую стадию, когда давление близко к равномерному и наблюдается неизменность формы профиля изношенной поверхности, называют установившимся износом [7].

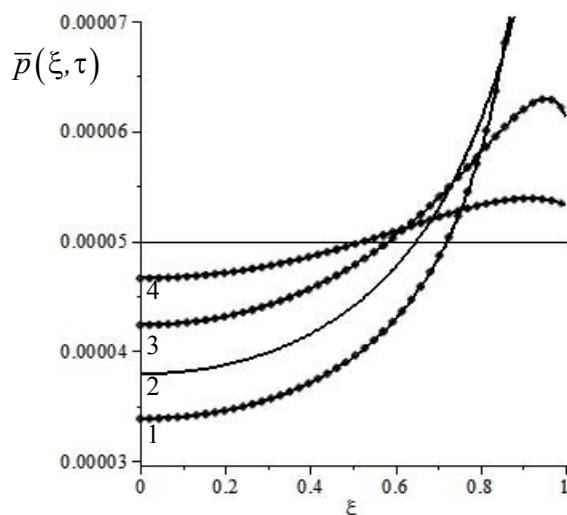


Рис. 2 – Функции распределения нормального давления в разные моменты времени

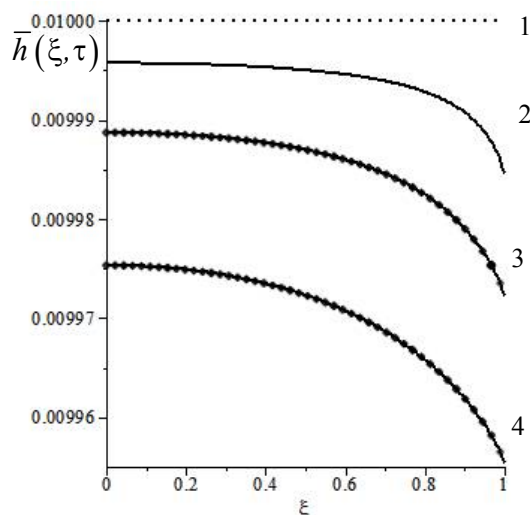


Рис. 3 – Функции профилей изношенной поверхности тонкой полосы в различные моменты времени

В работе [1] решена такая задача методом сведения интегральных уравнений к конечной системе линейных алгебраических уравнений на каждом временном шаге. При этом найденные функции давления под штампом и толщины полосы являются их поточечной аппроксимацией. На рис. 2 и 3 приведены графики искомых функций, полученных двумя способами: сплошным линиям соответствуют решения, полученные способом, описанным в данной статье, а точечным – полученным решением системы, приведенной в работе [1]. Анализируя графические изображения результатов, приходим к выводу о соответствии результатов, полученных разными методами.

Выводы

В данной работе решена плоская контактная задача об изнашивании тонкого упругого слоя при скольжении по нему штампа с плоским основанием. В этой задаче площадка контакта является фиксированной. Система интегральных уравнений, которой моделируется данная задача, и пошаговый метод дискретизации времени предложен И.Г. Горячевой [1]. В данной работе получено аналитическое и приближенное решение на каждом шаге по времени в отличие от работы [1], где получено численное решение на этих шагах. При этом доказана единственность найденного решения.

Анализ числовых результатов позволил получить следующие выводы:

- 1) функция распределения давления ограничена в любой момент времени;
- 2) наибольшее давление наблюдается в точках, близких к границе площадки контакта, а наименьшее – в центре этой площадки;
- 3) с увеличением времени давление в центре площадки контакта увеличивается, а на границе – уменьшается, что приводит к выравниванию этой функции;
- 4) с увеличением времени наибольший износ тонкого слоя наблюдается на границе площадки контакта.

Как было отмечено в работе [7] и подтвердилось результатами данной работы, процесс изнашивания можно разбить на две стадии: стадию приработки, когда давление и форма изношенной поверхности изменяются со значительной скоростью, и стадию установившегося износа, когда функция давления близка к равномерной, а профиль изношенной поверхности практически не изменяется. На стадии установившегося износа средняя скорость изнашивания является минимальной. Равномерность давления приводит к уменьшению его величины в местах наибольшей концентрации. Это приводит к более мягким условиям работы. Эта стадия является наиболее благоприятной для пары трения. Однако, для достаточно тонкого слоя установившийся режим может не наступить из-за преждевременности его полного износа. В связи с этим, важно знать значение толщины покрытия для обеспечения его долговечности, анализ чего проведен в работе [1].

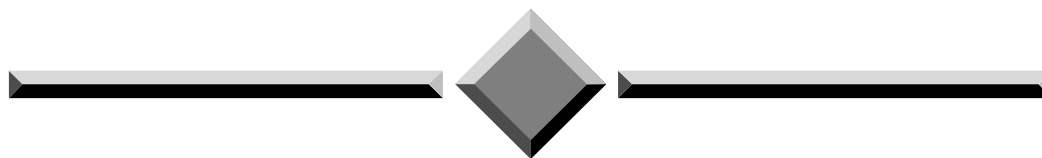
Полученные решения могут быть использованы для решения некоторых вопросов оптимизации процессов изнашивания в инженерной практике.

Предложенный метод решения может быть применен к решению задач нелинейного износа, а также для износоконтактных задач при переменной области контакта.

Литература

1. Горячева И.Г. Контактные задачи в трибологии [Текст] / И.Г. Горячева, М.Н. Добычин. – М.: Машиностроение, 1988. – 254 с.
2. Горячева И.Г. Контактные задачи с учетом износа [Текст] / И.Г. Горячева, И.А. Солдатенков // Механика контактных взаимодействий // Под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. – М.: Физматлит, 2001. – С. 438-458.
3. Пронников А.С. Надежность машин [Текст] / А.С. Пронников. – М.: Машиностроение, 1978. – 592 с.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости [Текст] / Л.А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
5. Александров В.М. Введение в механику контактных взаимодействий [Текст] / В.М. Александров, М.И. Чебаков. – Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. – 114 с.
6. Александров В.М. Математические методы в контактных задачах с износом [Текст] / В.М. Александров, Е.В. Коваленко // Нелинейные модели в задачах механики деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1984. – С. 77-89.
7. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия [Текст] / И.Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
8. Савчук Ю. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми [Текст] / Ю. Савчук, О. Максимук // Вісник ТНТУ. – Тернопіль: ТНТУ, 2015. – Том 78. – № 2. – С. 70-80. – (Механіка та матеріалознавство).
9. Д'яченко Н.М. Аналітичний і наближено аналітичний розв'язок плоскої контактною задачі про взаємодію штампа з шорсткою смугою [Текст] / Н. М. Д'яченко, Т. О. Жмур, А. М. Нікітенко. // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – №1. – С. 58-66.
10. Ильин В.А. Математический анализ. Продолжение курса [Текст] / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов // Под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.
11. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
12. Канторович Л.В. Функциональный анализ [Текст] / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

Поступила в редакцію 29.04.2016



Проблеми трибології
“Problems of Tribology”
E-mail: tribosensor@gmail.com

Dyachenko N.N., Manko N.I.-V. **The approached analytical decision of the flat contact problem into account wear of the thin elastic layer at the fixed area of contact.**

The decision of a problem on linear wear process of a thin elastic strip is received at sliding on it of a stamp with the flat basis. I.G.Goryacheva [1] is offered a step-by-step method of digitization of time, where on each step the system of the integral equations is solved numerically. In the given work on each step to time the system of the integral equations is shown to one Fredholm operational equation of the second sort. The set to which belongs required decisions of such equation is found, and existence of the unique decision on this set is proved. On each time step the analytical decision in the form of the power series is found. Coefficients of this series can be found from infinite system of the linear algebraic equations. The approached decision is found by a reduction method and a iteration method. The analysis of distribution of pressure and a thickness of a worn out strip in different time intervals is carried out: at a stage of the run-in and at a stage of the steady-state wear. The comparative analysis with the known decision from work [1] is carried out.

Keywords: the flat contact problem, thin elastic strip, wear, iteration method, reduction method.

References

1. Goryacheva I.G., M.N. Dobychin Kontaknyie zadachi v tribologii [Text]. M: Mashinostroenie, 1988. 254 p.
2. Goryacheva I.G., Soldatenkov I.A. Kontaknyie zadachi s uchetom iznosa. Mehanika kontaknyih vzaimodeystviy [Text]. Pod red. I.I. Vorovich, V.M. Aleksandrov. M: Fizmatlit, 2001. P. 438-458.
3. Пронников А.С. Nadezhnost mashim [Text]. M: Mashinostroenie, 1978. 592 p.
4. Galin L.A. Kontaknyie zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti [Text]. M: Nauka, 1980. 304 p.
5. Aleksandrov V.M., Chebakov M.I. Vvedenie v mehaniku kontaknyih vzaimodeystviy [Text]. Rostov-na Donu: Izdatelstvo OOO «TsVVR», 2007. 114 p.
6. Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V. Matematicheskie metody v kontaknyih zadachah s iznosom [Text]. Nelineynye modeli v zadachah mehaniki deformiruemogo tverdogo tela. M.: Nauka, 1984. P. 77-89.
7. Goryacheva I.G. Mehanika friktsionnogo vzaimodeystviya [Text]. M.: Nauka, 2001. 478 p.
8. Savchuk J., Maksimuk O. Kontaktna zadacha pro znoshuvannia pruzhnoi pivploshchyny shtampamy kanonichnoi formy. Visnyk TNTU. Ternopil: TNTU, 2015. T. 78. № 2. P. 70-80. (Mekhanika ta materialoznavstvo).
9. Dyachenko N.M., Zhmur T. O., Nikitenko A.M. Analitichnyi i nablyzheno analitichnyi rozviazok ploskoi kontaktnoi zadachi pro vziaemodiiu shtampa z shorstkoiu smuhoiu. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Serii: fiz.-mat. nauky. 2008. №1. P. 58-66.
10. Ilin V.A., Sadovnichiy V.A. Sendov B.I.N. Matematicheskii analiz. Prodolzhenie kursa. Pod red. A.N. Tihonova. M.: Izd-vo MGU, 1987. 358 p.
11. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza. M.: Nauka, 1989. 624 p.
12. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funktsionalnyi analiz. M.: Nauka, 1984. 752 p.