Багрій О.В.
Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна
E-mail: avadaro@yahoo.com

РІВНЯННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СЕРЕДОВИЩА З СУТТЄВИМ ВНУТРІШНІМ КУЛОНОВИМ ТЕРТЯМ

УДК 620.17

Сформульовано плоску задачу для середовища з суттєвим внутрішнім кулоновим тертям як крайову задачу плоскої неоднорідної фізично нелінійної області, заповненої матеріалом, на деформації формозміни якого суттєво впливають величини стискуючих напружень. У математичному формулюванні задачі, крім відомих рівнянь рівноваги і нерозривності деформацій, використані специфічні фізичні рівняння, в які замість пружних сталих введено змінні параметри, що залежать від досягнутих на кожному етапі величин напружень і деформацій.

Ключові слова: плоска задача, напруження, деформації, фізичні співвідношення, внутрішнє тертя, дискретний матеріал, закони деформування

Вступ. Формулювання плоскої задачі для середовища з суттєвим внутрішнім кулоновим тертям

Задача формулюється як крайова задача плоскої неоднорідної фізично нелінійної області, заповненої матеріалом, на деформації формозміни якого суттєво впливають величини стискуючих напружень (матеріалом з суттєвим проявом внутрішнього тертя) [1].

Задача полягає у визначенні полів напружень та деформацій при збуренні області силовими або кінематичними чинниками.

Спроби Нав'є, Міндліна, Дересевича, Кандаурова та ін. побудувати механіку дискретних середовищ на основі описання контактної взаємодії навіть ідеалізованих частинок, що мають форму куль або циліндрів, фактично закінчились невдачею.

Тому формулювання плоскої задачі механіки дискретних матеріалів ведеться як для квазісуцільного середовища, але з особливими законами деформування, які принципово відрізняються від закону Гука і враховують вплив сухого кулонового тертя не тільки в граничній, але і в дограничній стадіях.

Матеріал, що заповнює розрахункову область, вважається квазісуцільним. Модель деформування матеріалу представляється комбінацією моделі ідеально зв'язного матеріалу (моделі Прандтля) і моделі внутрішнього тертя (моделі Кулона).

Фізичні співвідношення моделі записуються у формі співвідношень механіки деформівного твердого тіла але зі змінними модулями деформації, величини яких залежать від досягнутого рівня напружень і деформацій і визначаються за результатами випробувань макрозразків матеріалу в умовах плоскої деформації.

Рівняння плоскої задачі механіки дискретних матеріалів

Згідно з відомою теоремою механіки деформівного твердого тіла рішення крайової задачі для області з заданими крайовими умовами буде єдиним, якщо задовольняються умови рівноваги, нерозривності деформацій, прийняті в розрахунковій моделі фізичні співвідношення та крайові умови.

Умови рівноваги для випадку плоскої деформації записуються в системі довільних ортогональних осей x, y у вигляді:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=V_x\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=V_y\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

де $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – напруження в площині деформування;

V_x, V_y – проекції питомих об'ємних сил на осі координат.

В матричній формі систему (1) можна записати у вигляді одного матричного рівняння:

$$[B]^T\{\sigma\}=\{V\}, \tag{2}$$

де $[B]^T$ – транспонована матриця диференціального оператора.

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \tag{3}$$

де $\{\sigma\}, \{V\}$ – вектори напружень і об’ємних сил

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix}.$$

Умова нерозривності деформацій може бути зведена до лінійних диференціальних залежностей Коші:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}; \quad \gamma_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \tag{4}$$

які в матричній формі набувають вигляду:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}, \tag{5}$$

де $[B]$ – матриця диференціального оператора;

$\{\varepsilon\}, \{u\}$ – вектори деформацій і переміщень.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}.$$

Вигляд рівнянь рівноваги і геометричних рівнянь Коші не залежить від виду матеріалу і вимагає виконання тільки умови "малості деформацій". Фізичні ж співвідношення різних теорій деформаційного типу встановлюються для кожного класу матеріалів шляхом узагальнення результатів експериментальних досліджень. Саме для формулювання таких співвідношень для плоскої задачі проведені дослідження на зразках дискретних матеріалів і матеріалів з малою зв’язністю [2, 3] на спеціально розроблених приладах плоскої деформації [4, 5, 6].

Дослідженнями встановлено, що закономірності формозміни дискретного матеріалу для умов плоскої деформації описуються випуклою поверхнею деформування в системі інваріантних осей Γ, S, P, де $P = \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_m$ – сума головних напружень; $S = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2)$ – максимальне дотичне напруження; $\Gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ – максимальна деформація зсуву. Вона наглядно може бути представлена сімейством кривих $S = S(\Gamma)$ при $P = \text{const}$, що є зрізами поверхні площинами, перпендикулярними до осі P.

Як показав проведений аналіз [7], найбільш вдалою апроксимацією експериментальних кривих $S = S(\Gamma)$ при $P = \text{const}$ слід вважати їх апроксимацію дробово - лінійною функцією:

$$S = \frac{n\Gamma}{m + \Gamma} P, \tag{6}$$

де n і m – параметри, що визначаються за результатами дослідів.

В дослідженому інтервалі суми напружень P $(0 \div 400\,\text{кПа})$ сімейство кривих можна осереднити залежністю між відносними напруженнями і деформаціями:

$$\frac{S}{\mathrm{P}} = \frac{n\Gamma}{m + \Gamma}. \tag{7}$$

Похідна функції (6) по деформаціях Γ має фізичний зміст модуля зсуву G:

$$G = \frac{n\,m}{(m + \Gamma)^2} P. \tag{8}$$

Як видно з останнього виразу, модуль зсуву не є сталою дискретного матеріалу. Його величина залежить від досягнутого рівня інваріантів напружень P і деформацій Γ і може бути визначена графічним диференціюванням експериментальних кривих [7] чи одержаними після апроксимації інваріантними залежностями (8).

Із співвідношення (7) аналогічно можна знайти відносний модуль зсуву $G_0 = \dfrac{G}{P}$.

$$G_0 = \frac{n\,m}{(m+\Gamma)^2}. \tag{9}$$

При $\Gamma \to 0$ $G_0 \to G_{0n} = \dfrac{n}{m}$. Отже, початкове значення відносного модуля зсуву G_{0n} дорівнює відношенню параметрів $\dfrac{n}{m}$.

В основу лінійної теорії пружності покладена фізична модель пружного тіла з двома незалежно визначуваними параметрами. Це можуть бути: модуль зсуву G, модуль Юнга E, модуль об'ємної деформації K, коефіцієнт Пуассона ν, параметр Лоде λ та ін. Два з перелічених параметрів безпосередньо входять у фізичні рівняння, що зв'язують компоненти тензорів напружень і деформацій.

Якщо доведена інваріантність параметрів виду напруженого стану, вони вважаються характеристиками матеріалу і вводяться в лінійні співвідношення, справедливі для будь-якого напруженого стану. Наприклад, закони зміни об'єму і форми для пружного матеріалу можуть бути записані через октаедричні напруження σ_0, τ_0 і деформації у вигляді найпростіших лінійних інваріантних функцій

$$\sigma_0 = K\varepsilon_0 \quad \text{і} \quad \tau_0 = G\gamma_0, \tag{10}$$

кожна з яких характеризується однією незалежно визначеною сталою матеріалу: модулем об'ємної деформації K або модулем зсуву G.

Ці ж характеристики входять у відомі рівняння закону Гука, записані в компонентній формі.

Набагато більш складні закони деформування дискретних матеріалів замість сталих характеристик G і K включають функції, що залежать від виду напруженого стану і досягнутого рівня деформацій, і тому не можуть вважатись механічними характеристиками матеріалу.

Вплив напруженого стану враховано тим, що для плоскої задачі характер вказаних функцій визначається за результатами лабораторних випробувань зразків саме в умовах плоскої деформації.

Залежність модуля зсуву G від інваріантів тензорів напружень P і деформацій Γ після апроксимації експериментальних кривих дробово-лінійною функцією прийнята у вигляді (8):

$$G = \frac{n\,m}{(m+\Gamma)^2} P,$$

де n, m – параметри апроксимації.

Більш складним питанням виявилось безпосереднє незалежне встановлення аналогічної функції для модуля об'ємної деформації K, оскільки крім відмічених чинників на об'ємну деформацію суттєво впливає недостатньо вивчений фактор дилатансії.

Аналіз відомих даних показав, що для дискретних матеріалів простіше визначати модуль K не безпосередньо з дослідів, а через модуль зсуву G і коефіцієнт Пуассона ν за відомим в механіці деформівного твердого тіла співвідношенням, що для плоско-деформативного стану можна записати у вигляді:

$$K_{п.д.} = 2G_{п.д.} \frac{1+\nu_{п.д.}}{1-\nu_{п.д.}}, \tag{11}$$

де $G_{п.д.}, \nu_{п.д.}$ – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона, знайдені експериментально в умовах плоскої деформації.

Описані в [4, 5, 6] спеціальні лабораторні випробування на приладах плоскої деформації показали, що коефіцієнт Пуассона ν порівняно з іншими деформаційними параметрами є найменш чутливим щодо впливу описаних вище факторів при роботі дискретного матеріалу в дограничній стадії.

Тому запропоновано при формулюванні фізичних співвідношень плоскої задачі приймати осереднене в робочому діапазоні значення коефіцієнта Пуассона $\nu = \nu_{п.д.}$, а модуль об'ємної деформації визначати із співвідношення (11).

Результати лабораторних досліджень активного процесу деформування представлені у формі нелінійних співвідношень між інваріантами тензорів напружень і деформацій:

$$S = G_{зм}\Gamma; \tag{12}$$

$$P = K_{зм}\theta. \tag{13}$$

Для пасивного процесу деформування (розвантаження і повторне навантаження) приймаються лінійні співвідношення (12), (13), в яких $G_{зм} = G = \text{const}$, $K_{зм} = K = \text{const}$.

Інваріантні співвідношення (12), (13) формально аналогічні записам законів зміни форми і зміни об'єму в деформаційній теорії пластичності, але, на відміну від них, включають змінні параметри деформування: модуль зсуву $G_{зм}$ і модуль об'ємної деформації $K_{зм}$, які розглядаються як функції досягнутих деформацій Γ і стискуючих напружень P. Для дискретних матеріалів (матеріалів з нульовою зв'язністю) змінний модуль зсуву визначається з виразу:

$$G_{зм} = \frac{n}{m+\Gamma} P, \tag{14}$$

а модуль об'ємної деформації

$$K_{зм} = 2G \frac{1+\nu}{1-\nu}. \tag{15}$$

Параметри деформування $G_{зм}, \nu$, що входять у вирази для модулів деформацій, визначаються за результатами лабораторних випробувань зразків матеріалу в умовах плоскої деформації за методикою, описаною в [4, 6].

Фізичні рівняння плоскої задачі, що зв'язують між собою компоненти тензорів напружень і деформацій, зручно записувати у формі рівнянь закону Гука, в які замість сталих характеристик матеріалу – модулів деформацій G і K – включені змінні параметри $G_{зм}, K_{зм}$ (14), (15). Величини цих параметрів залежать від досягнутого рівня напружено-деформативного стану в кожній точці розрахункової області.

Сформулюємо фізичні рівняння плоскої задачі механіки дискретних матеріалів у компонентній формі.

Відомі співвідношення закону Гука для плоско-деформативного напруженого стану мають вигляд:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right];\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right];\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = 0;\\
\gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy};\\
\gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad \text{або} \quad
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_y\right);\\
\sigma_y &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_z\right);\\
\sigma_z &= -\nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right);\\
\tau_{xy} &= -\tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy};\\
\tau_{xz} &= \tau_{zx} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

В цих рівняннях E і ν – загально прийняті пружні сталі – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона.

Якщо ввести спеціальні деформаційні параметри для плоскої деформації:

$$E_{п.д.} = \frac{E}{1-\nu}, \quad \nu_{п.д.} = \frac{\nu}{1-\nu}, \tag{17}$$

то співвідношення (16) набувають вигляду:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_{п.д.}}\left[\sigma_x - \nu_{п.д.}\sigma_y\right];\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E_{п.д.}}\left[\sigma_y - \nu_{п.д.}\sigma_x\right];\\
\gamma_{xy} &= \frac{2\left(1+\nu_{п.д.}\right)}{E}\tau_{xy},
\end{aligned}\right\} \quad \text{або} \quad
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E_{п.д.}}{1-\nu_{п.д.}^2}\left(\varepsilon_x + \nu_{п.д.}\varepsilon_y\right);\\
\sigma_y &= \frac{E_{п.д.}}{1-\nu_{п.д.}^2}\left(\varepsilon_y + \nu_{п.д.}\varepsilon_x\right);\\
\tau_{xy} &= \frac{E_{п.д.}}{2\left(1+\nu_{п.д.}\right)}\gamma_{xy}.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

В наведених фізичних рівняннях $E_{п.д.}$ і $\nu_{п.д.}$ – параметри, що можуть бути визначені експериментально за результатами випробувань зразків матеріалу в умовах плоскої деформації, або знайдені за формулами (17).

Інваріантні співвідношення (12), (13), одержані для формулювання плоскої задачі механіки дискретних матеріалів, включають інші параметри: модуль зсуву G та модуль об'ємної деформації K. Параметри G та K легко можна виразити через $E_{п.д.}$ і $\nu_{п.д.}$. Порівнюючи рівняння для τ_{xy} систем (16) і (18), приходимо до висновку, що:

$$G_{п.д.} = G. \tag{19}$$

Складаючи два перших рівняння системи (18), одержимо:

$$P = \frac{E_{п.д.}}{1-\nu_{п.д.}}\theta = 2G_{п.д.}\frac{1+\nu_{п.д.}}{1-\nu_{п.д.}}\theta, \tag{20}$$

або

$$K_{п.д.} = 2G_{п.д.}\frac{1+\nu_{п.д.}}{1-\nu_{п.д.}}. \tag{21}$$

Оскільки модуль зсуву $G_{п.д.}$ і коефіцієнт Пуассона $\nu_{п.д.}$ визначаються за результатами випробувань в умовах плоскої деформації на приладах, описаних у [4, 5, 6], за методикою, що описана у [4, 6], функції $G_{п.д.}$, $K_{п.д.}$ можуть бути безпосередньо використані при записі фізичних рівнянь, які в цьому випадку набувають вигляду:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_{п.д.}+2G_{п.д.}}{2}\varepsilon_x + \frac{K_{п.д.}-2G_{п.д.}}{2}\varepsilon_y;\\
\sigma_y &= \frac{K_{п.д.}+2G_{п.д.}}{2}\varepsilon_y + \frac{K_{п.д.}-2G_{п.д.}}{2}\varepsilon_x;\\
\tau_{xy} &= G_{п.д.}\gamma_{xy};\\
\tau_{yx} &= G_{п.д.}\gamma_{yx}.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

В подальшому викладенні індекси „*п.д.*" вживатись не будуть, а під K і G будемо розуміти значення функцій, що відповідають досягнутому рівню напруженого стану в конкретній точці і визначаються за результатами лабораторних випробувань зразків дискретного матеріалу в умовах плоскої деформації.

Таке представлення дозволяє формулювати фізичні співвідношення плоскої задачі у формі рівнянь узагальненого закону Гука для плоскої деформації, але зі змінними модулями зсуву і об'ємної деформації:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_{зм}+2G_{зм}}{2}\varepsilon_x + \frac{K_{зм}-2G_{зм}}{2}\varepsilon_y;\\
\sigma_y &= \frac{K_{зм}-2G_{зм}}{2}\varepsilon_x + \frac{K_{зм}+2G_{зм}}{2}\varepsilon_y;\\
\tau_{xy} &= G_{зм}\gamma_{xy}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Систему фізичних рівнянь (23) можна записати одним матричним рівнянням:

$$\{\sigma\} = [D]_{зм}\{\varepsilon\}, \tag{24}$$

де $\{\sigma\},\{\varepsilon\}$ – вектори напружень і деформацій;

$[D]_{зм}$ – матриця змінних деформаційних параметрів.

$$[D]_{зм} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} K_{зм}+2G_{зм} & K_{зм}-2G_{зм} & 0\\ K_{зм}-2G_{зм} & K_{зм}+2G_{зм} & 0\\ 0 & 0 & 2G_{зм}\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Такий запис дозволяє безпосередньо використовувати співвідношення (23), (24) як фізичні рівняння при формулюванні плоскої задачі для матеріалів з суттєвим внутрішнім тертям, а величини змінних деформаційних параметрів $G_{зм}, K_{зм}$ на кожному етапі розрахунку призначати за результатами випробувань зразків матеріалу в умовах плоскої деформації.

Фізичні співвідношення (12 - 25) описують деформування дискретного матеріалу при монотонному зростанні відношень напружень $\frac{S}{P}$. Це аналогічно відомому в теорії пластичності активному процесу деформування. Процес пасивного деформування (розвантаження і повторне навантаження) спеціально не вивчався. В першому наближенні зв'язок між напруженнями і деформаціями при пасивному деформуванні дискретного матеріалу можна прийняти у вигляді лінійних співвідношень, як це зазвичай робиться в теорії пластичності. Для цього достатньо вважати модулі деформації сталими величинами $G_n = \text{const}; K_n = \text{const}$, значення яких для умов плоскої деформації принципово можна визначити за допомогою описаної у [4, 5, 6] лабораторної системи.

В [7] змінні модулі деформації запропоновано визначати із загальної експериментальної поверхні деформування конкретного матеріалу або як суму величин, визначених з поверхні зв'язності Прандтля і поверхні тертя Кулона.

Вплив на деформування твердих тіл молекулярної зв'язності добре вивчений і описується моделями теорії пластичності. Особливості ж деформування матеріалів з суттєвим внутрішнім кулоновим тертям відносяться до моделі Кулона і демонструються на прикладі плоскої задачі, фізичні співвідношення якої сформульовані за результатами випробувань зразків сипкого матеріалу в умовах плоскої деформації.

Висновки

Плоска задача для матеріалів з суттєвим внутрішнім кулоновим тертям формулюється як крайова задача механіки деформівного твердого тіла з особливими законами деформування, що встановлюються за результатами лабораторних випробувань і враховують вплив на процес деформування не тільки молекулярної зв'язності матеріалу, але і внутрішнього кулонового тертя.

У математичному формулюванні задачі, крім відомих рівнянь рівноваги і нерозривності деформацій, використані специфічні фізичні рівняння, в які замість пружних сталих введено змінні параметри, що залежать від досягнутих на кожному етапі величин напружень і деформацій.

Література

1. Ковтун В. В. Формулювання задачі контактної взаємодії елементів конструкцій з дискретним середовищем / В. В. Ковтун, О. В. Колесникова // Проблеми сучасної інженерної технології : 4-а міжвуз. наук.-теор. конф., 14–15 січня 2003 р. : зб. наук. праць. – І., 2003. – Ч. ІІ (спец. випуск). – № 24. – С. 127–130.

2. Багрій О. В. Вплив внутрішнього кулонового тертя на деформування композитних матеріалів з малою зв'язністю / О. В. Багрій // Проблеми трибології (Problems of Tribology). – 2013. – № 4. – С. 114–120.

3. Багрій О. В. Особливості деформування композитних матеріалів з малою зв'язністю в умовах плоскої деформації / О. В. Багрій // Проблеми трибології (Problems of Tribology). – 2016. – № 4. – С. 55–59.

4. Ковтун В. В. Прилад і методика проведення дослідів з визначення механічних характеристик дискретних матеріалів в умовах плоскої деформації / В. В. Ковтун, О. В. Колесникова // Сучасні технології виробництва в розвитку економічної інтеграції та підприємництва : І Польськ.-Укр. наук. конф., 16–18 жов. 2003 р. : зб. матеріалів. – Х., 2003. – С. 125–126.

5. Пат. 18390 Україна, МПК (2006) G 01 N 33/24. Пристрій для лабораторних випробувань пористих матеріалів / заявники Ковтун В. В., Багрій О. В. ; власник Хмельн. нац. ун-т. – № u 2006 03878 ; заявл. 07.04.06 ; опубл. 15.11.06, Бюл. № 11. – 4 с.

6. Багрій О. В. Обладнання та методика лабораторних випробувань зразків дискретних матеріалів в умовах плоскої деформації / О. В. Багрій, В. В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2013. – № 2. – С. 31–39.

7. Багрій О. В. Аналіз впливу внутрішнього кулонового тертя на деформування композитних матеріалів / О. В. Багрій // Проблеми трибології (Problems of Tribology). – 2014. – № 4. – С. 37–43.

Поступила в редакцію 15.12.2017

Bagriy O.V. **Equations of a plane problem for the environment with substantial internal Coulomb friction.**

A plane problem for an environment with a substantial internal coulomb friction is formulated as a boundary value problem for a planar inhomogeneous physically nonlinear region filled with a material material whose deformations of shaping are significantly affected by the compressive stresses. In the mathematical formulation of the problem, in addition to the known equations of equilibrium and continuity of deformations, specific physical equations are used in which variable parameters are introduced instead of elastic constants, which depend on the values of stresses and deformations achieved at each stage.

Key words: plane problem, stresses, deformations, physical relations, internal friction, discrete material, patterns of deformation.

References

1. Kovtun V. V. Formulyuvannya zadachi kontaktnoyi vzayemodiyi elementiv konstruktsiy z dyskretnym seredovyshchem. V. V. Kovtun, O. V. Kolesnykova. Problemy suchasnoyi inzhenernoyi tekhnolohiyi : 4-a mizhvuz. nauk.-teor. konf., 14–15 sichnya 2003 r. : zb. nauk. prats'. I., 2003. Ch. II (spets. vypusk). № 24. P. 127–130.

2. Bahriy O. V. Vplyv vnutrishn'oho kulonovoho tertya na deformuvannya kompozytnykh materialiv z maloyu zv"yaznistyu. O. V. Bahriy. Problemy trybolohiyi (Problems of Tribology). 2013. № 4. P. 114–120.

3. Bahriy O. V. Osoblyvosti deformuvannya kompozytnykh materialiv z maloyu zv"yaznistyu v umovakh ploskoyi deformatsiyi. O. V. Bahriy. Problemy trybolohiyi (Problems of Tribology). 2016. № 4. P. 55–59.

4. Kovtun V. V. Prylad i metodyka provedennya doslidiv z vyznachennya mekhanichnykh kharakterystyk dyskretnykh materialiv v umovakh ploskoyi deformatsiyi. V. V. Kovtun, O. V. Kolesnykova. Suchasni tekhnolohiyi vyrobnytstva v rozvytku ekonomichnoyi intehratsiyi ta pidpryyemnytstva : I Pol's'k.-Ukr. nauk. konf., 16–18 zhov. 2003 r. : zb. materialiv. X., 2003. P. 125–126.

5. Pat. 18390 Ukrayina, MPK (2006) G 01 N 33/24. Prystriy dlya laboratornykh vyprobuvan' porystykh materialiv. zayavnyky Kovtun V. V., Bahriy O. V. ; vlasnyk Khmel'n. nats. un-t. № u 2006 03878 ; zayavl. 07.04.06 ; opubl. 15.11.06, Byul. № 11. 4 p.

6. Bahriy O. V. Obladnannya ta metodyka laboratornykh vyprobuvan' zrazkiv dyskretnykh materialiv v umovakh ploskoyi deformatsiyi. O. V. Bahriy, V. V. Kovtun. Visnyk Khmel'nyts'koho natsional'noho universytetu. Tekhnichni nauky. 2013. № 2. P. 31–39.

7. Bahriy O. V. Analiz vplyvu vnutrishn'oho kulonovoho tertya na deformuvannya kompozytnykh materialiv. O. V. Bahriy. Problemy trybolohiyi (Problems of Tribology). 2014. № 4. P. 37–43.