

**Костогрив С.Г.,
Мисліборський В.В.**

Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна
E-mail: mvovka13@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

УДК 621.891:620.194

В роботі розглянуті загальні підходи і принципи побудови розрахункових моделей механічних коливальних систем, а також методика їх спрощення та визначення зведених мас і крутильних жорсткостей.

Ключові слова: коливальні параметри об'єкта, фактори, збуджуючі коливання, структурні елементи системи, пружні та непружні зв'язки, динамічна модель механічної системи, спрощена модель коливальної системи.

Вступ

Для дослідження механічних коливань в реальних технічних об'єктах їх замінюють відповідними моделями, абстрагуючись від другорядних процесів та структурних елементів реального об'єкта і виділяючи в ньому тільки ті процеси і елементи, які визначають і характеризують явища, що досліджуються.

Мета і постановка задачі

Робота виконується з метою обґрунтування використання загальних підходів і принципів побудови розрахункових моделей механічних коливальних систем, а також методика їх спрощення та визначення зведених мас і крутильних жорсткостей.

1. Принципи побудови моделей механічних коливальних систем

Розглянемо для прикладу автомобіль як об'єкт, в якому відбувається цілий комплекс коливальних процесів різних за своєю природою і характером [1]. Як правило, ці процеси взаємозв'язані. Однак серед них можна виділити: коливання маси автомобіля на ресорах і шинах коліс; вібрації рами, кузова та інших конструктивних елементів. Побудувати і дослідити модель, яка враховувала б всі коливальні процеси такого роду складальних системах практично не можливо і не доцільно. Тому до моделювання коливальних процесів в механічних системах підходять таким чином і в такій послідовності:

- 1) визначаються з тим, які коливальні параметри об'єкта потрібно досліджувати;
- 2) встановлюють збуджуючі коливання фактори (силові, кінематичні та інші);
- 3) виділяють основні структурні елементи системи, які беруть участь в коливальному процесі, у вигляді зосереджених або розподілених мас;
- 4) виявляють пружні та непружні зв'язки між структурними елементами системи, які беруть участь в коливаннях;
- 5) будують динамічну модель механічної системи, яка відображає її основні, відповідно до об'єкта дослідження, властивості;
- 6) при необхідності спрощують модель коливальної системи.

Ці принципи повністю відповідають загальному підходу до дослідження коливань в механічних системах, який викладений нижче. Дійсно, першим пунктом встановлюються вихідні функції, а пункти третій, четвертий і п'ятий безпосередньо відносяться до динамічних властивостей коливальної системи, які визначає її внутрішня структура.

Повернемося, однак, до побудови моделі коливальної системи автомобіля для дослідження питання про коливання його мас при русі по нерівностях дороги. На основі цього можна давати оцінку так званій плавності руху автомобіля і його комфортними властивостями, а також вирішувати і інші задачі, як наприклад, про режим навантаження елементів ходової системи. Основними коливальними параметрами тут будуть: вертикальні коливання центра мас автомобіля $Z(t)$ на ресорах підвіски; кутові коливання кузова на ресорах $Q(t)$ відносно осі, що проходить через центр мас і перпендикулярній поздовжній площині, що проходить через центр мас; поперечно-кутові коливання $\varphi(t)$ кузова відносно поздовжньої осі, що проходить через центр мас; вертикальні коливання коліс на пружних шинах $Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t), Z_4(t)$. Таким чином, маємо сім коливальних вихідних параметрів системи, які потрібно дослідити. Основним фактором, що збуджує коливання є нерівності дороги. Тут маємо змушуючі функції. Функцію зміни висоти нерівностей дороги $Z_v(t)$ під правими колесами і відповідну функцію $Z(t)$, – під лівими колесами.

Структурними елементами моделі є маса тієї частини автомобіля, яка знаходиться на підвісці m_1 і задніх коліс m_2 . Між цими структурними елементами є пружні і дисипативні зв'язки. Маса кузова m зв'язана з масою кожного з передніх коліс m_1 умовною пружиною з характеристикою відповідно з масами задніх коліс вона зв'язана пружиною з характеристикою c_1, c_2 . Маси передніх m_1, m_2 задніх коліс мають пружний зв'язок з дорогою через шини з характеристиками c_1, c_2 . Кожному з пружних зв'язків відповідає непружний зв'язок через передні і задні амортизатори підвіски з характеристиками k_1, k_2 непружний зв'язок коліс через шини з дорогою з характеристиками k'_1, k'_2 . Про пружні і дисипативні характеристики механічних коливальних систем нижче буде сказано більш детально.

Виходячи з цього динамічну модель коливальної системи автомобіля можна подати у вигляді, як це показано на рис. 1.

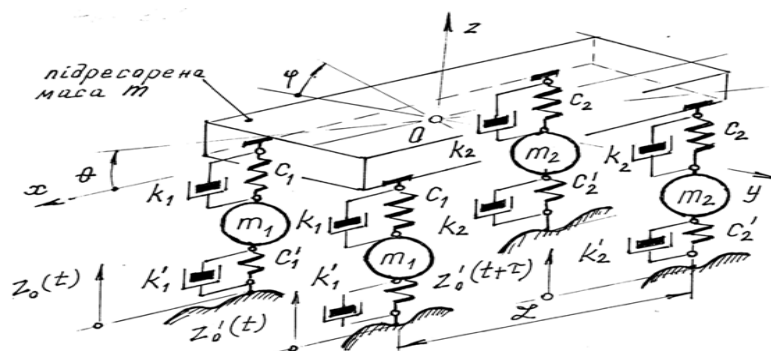


Рис. 1 – Просторова динамічна модель автомобіля, який рухається по нерівностях дороги

Складаючи цю модель, ми абстрагувались від деяких факторів, які в певній мірі не слід вважати головними при розгляді цього питання. По перше, не враховуємо коливання відносно поздовжньої і поперечної осі автомобіля. По друге, не враховуємо вплив обертових мас автомобіля (двигуна, деталей силової передачі) на коливання по вибраних координатах. По третє, не враховуємо те, що обертовий момент на колесах може бути змінним і збуджувати коливання маси автомобіля.

Показана на рис. 1 модель може спростуватись по мірі того, від яких факторів ми абстрагуємось і які робимо припущення. Наприклад, припустимо, що під лівими і правими колесами функція зміни висот нерівностей дороги буде однаковою. В цьому разі система стане симетричною відносно осі x і не будуть виникати поперечно - кутові коливання $\varphi(t)$ навколо цієї осі. Наслідком цього є те, що від просторової коливальної системи (рис. 1) перейдемо до плоскої коливальної системи (рис. 2)

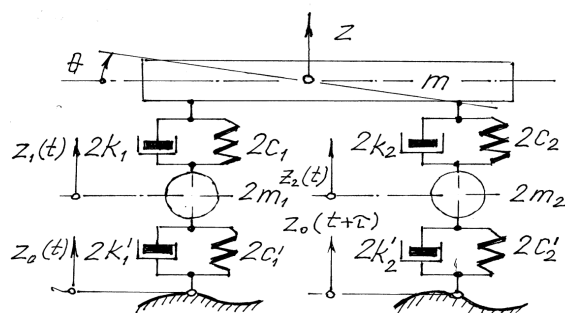


Рис. 2 – Плоска динамічна модель автомобіля, який рухається по нерівностях дороги

Якщо в моделі, зображеній на рис. 1, сім вихідних коливальних параметрів, то в цій моделі тільки чотири. Можливе також і подальше спрощення моделі. Введемо припущення, що коливання маси автомобіля, що приходиться на передню підвіску m_n не зв'язані з коливаннями його маси, що приходиться на задню підвіску m_3 . Це приводить до більш простої моделі, якщо ми будемо розглядати коливання передньої частини автомобіля (рис. 3, а).

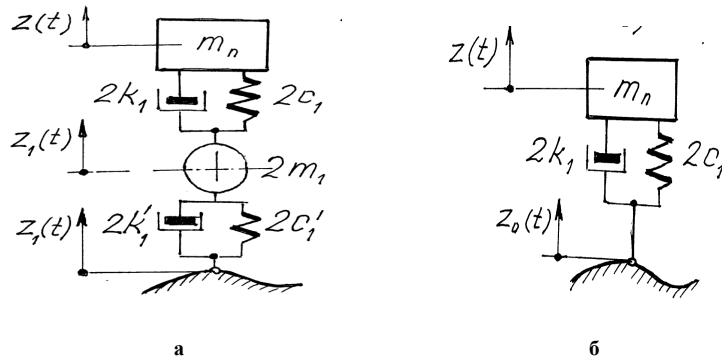


Рис. 3 – Спрощені динамічні моделі автомобіля (а і б), який рухається по нерівній дорозі

Внаслідок спрощення в динамічній моделі (рис. 3, а) маємо тільки два вихідних незалежних коливальних параметри.

Якщо припустити, що маса коліс незначна у порівнянні з масою передньої частини автомобіля, то динамічна модель прийме ще більш простий вигляд (рис. 3, б), і в ній буде тільки один вихідний параметр, що характеризує вертикальні коливання передньої частини автомобіля.

2. Особливості моделювання крутильних механічних коливальних систем

Розглянемо побудову динамічних моделей механічних систем, в яких мають місце так звані крутильні коливання. До них відносяться силові передачі від двигунів до робочих органів різного технологічного обладнання, верстатів, транспортних машин, тощо. В цих системах основні їх деталі – вали з розміщеними на них обертовими масами здійснюють обертовий рух, закручуються і навантажуються при цьому змінними навантаженнями коливального характеру.

Для прикладу візьмемо механізм головного руху токарно - револьверного верстата мод. 1336М, кінематична схема якого зображена на рис. 4 [2].

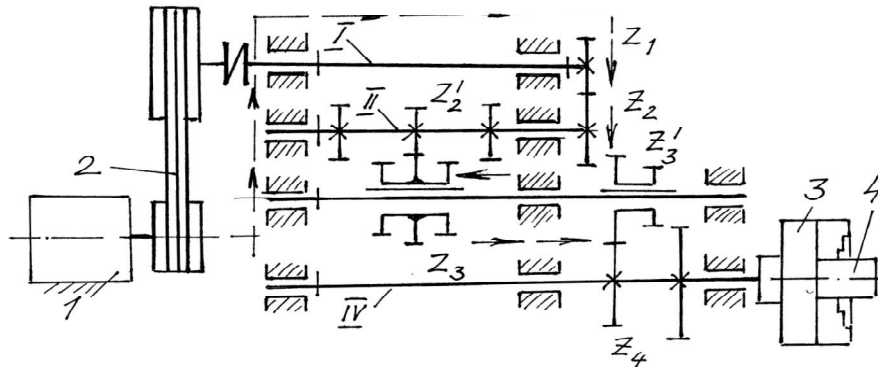


Рис. 4 – Кінематична схема проводу головного руху токарно - револьверного верстата мод.1336М

При заданій схемі ввімкнення зубчатих коліс потік енергії від двигуна 1 до планшайби 3 йде через пасову передачу 2, вал I, зубчасту пару (z_1, z_2) , вал II, зубчасту пару (z_2', z_3) , вал III, зубчасту пару (z_3', z_4) на вал IV із планшайбою 3 та закріпленою в ній деталлю 4.

Для такої системи вихідними коливальними параметрами є кути повороту обертових мас валів I, II, III, IV з посадженими на них деталями – відповідно $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*, \dots, \varphi_n^*$, а вхідною, збуджуючою коливання функцією є змінний в часі момент сил різання на шпинделі – $M_p(t)$. Основними структурними інерційними елементами системи тут є обертові маси двигуна, пасової передачі, валів із зубчастими колесами та планшайби з деталлю. Між ними є пружні зв'язки, які вмикають завдяки пружним властивостям валів та зубчастих зачеплень. Знехтуємо розсіюванням енергії у валах та передачах при коливальних, а також коливаннями в пасовій передачі. З врахуванням цього динамічну модель для дослідження коливань у приводі верстата (рис. 4) подамо у такому вигляді (рис. 5) [1].

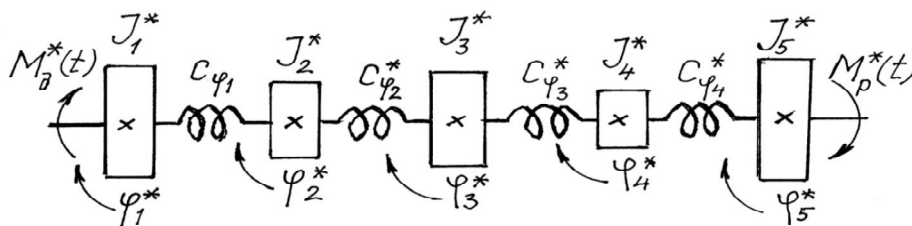


Рис. 5 – Динамічна модель для розрахунку коливань в приводі головного руху верстата мод. 1336М

Особливістю складання динамічних моделей крутильних систем є те, що в них рухомі маси, кути повороту та крутильні жорсткості зводяться до одного з валів передаточного механізму. Символ (*) в позначеннях цих величин означає зведення. Найчастіше ланкою зведення бувають вихідний та вхідний передачі. На рис. 5 позначені: I_1^* – зведений до вала I момент інерції, що враховує маси ротора електродвигуна, шківів пасової передачі і половини маси вала I; I_2^* – зведений до вала I момент інерції половини маси вала I, шестерні z_1 , шестерні z_2 і половини маси вала між шестернями z_2 і z_2' з вільною шестернею; I_3^* – зведений до вала I момент інерції, що враховує масу половини проміжка вала між шестернями z_2 і z_2' , масу шестерень z_2 і z_2' та половини маси вала III в проміжку між шестернями z_3 і z_3' та масу вільного лівого кінця вала III; I_4^* – зведений до валу I момент інерції мас половини вала III у проміжку між шестернями z_3 – z_3' , правого вільного кінця III, шестерні z_3' , шестерні z_4 , лівого вільного кінця вала IV і половини ділянки вала, що розміщений між шестернею z_4 і планшайбою 3; I_5^* – зведений до валу I момент інерції мас планшайби 3, деталі 4 і половини проміжку між шестернею z_4 і планшайбою 3. $C^* \varphi_1$ – зведена жорсткість валу I, що враховує пружні властивості валу I та зачеплення зубчастих коліс $z_1 - z_2$; $C^* \varphi_2$ – зведена до валу I жорсткість валу II у проміжку між шестернями $z_2 - z_2'$ із врахуванням пружних властивостей пар шестерень $z_1 - z_2$ та $z_2' - z_3$; $C^* \varphi_3$ – зведена до валу I жорсткість вала III на проміжку між шестернями $z_3 - z_3'$ із врахуванням пружних властивостей пар шестерень $z_3 - z_2'$ та $z_4 - z_3'$; $C^* \varphi_4$ – зведена до валу I жорсткість вала VI на проміжку між шестернею z_4 та планшайбою 3 із врахуванням пружних властивостей пари шестерень $z_4 - z_3'$.

Показану на рис. 5 динамічну модель крутильних коливань при потребі можна спростувати. Наприклад, якщо нас не цікавлять коливання проміжних валів і зубчастих коліс привода, а цікавить коливальний процес на валу I при дії змінних моментів збоку двигуна та планшайби, то систему можна звести до двохмасової. При цьому маси, момент сил і жорсткості зводяться до вала I, а весь передаточний механізм замінюється умовним валопроводом з еквівалентною (зведеною) жорсткістю (рис. 6).

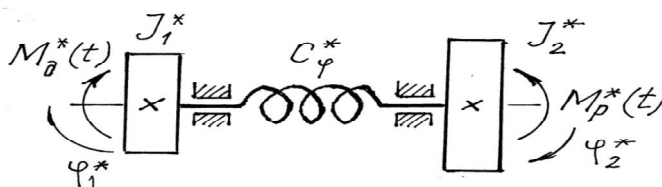


Рис. 6 – Спрощена модель для розрахунку крутильних коливань в приводі головного руху верстата мод. 1336М

Нижче для розглянутої нам динамічної схеми привода головного руху токарного - револьверного верстата подано приклад зведення мас та жорсткостей з використанням принципів, наведених у розділі 2.

3. Зведення мас в крутильних коливальних схемах

При вирішенні цього питання виходять з відомого в теорії механізмів і машин принципу, що кінетична енергія зведеної маси дорівнює сумі кінетичних енергій всіх рухомих мас системи, в якій проводять зведення мас. Розглянемо зведення мас валу I реальної схеми приводу (рис. 4) відповідно до його динамічної моделі (рис. 5).

Кінетична енергія маси з моментом інерції I_1 :

$$\frac{I_1^* \varphi_1^2}{2} = \frac{(I_\delta + I_{u_1}) u_n^2 \cdot \varphi_1^2}{2} + \frac{I_{u_2} + 0,5 I_{b_1}}{2} \varphi_1^2,$$

звідки:

$$I_1 = 0,5 I_{b_1} + I_{u_2} + (I_\delta + I_{u_1}) u_n^2,$$

де $I_\delta, I_{u_1}, I_{u_2}, I_{b_1}$ – відповідно моменти інерції: ротора двигуна, ведучого шківаса пасової передачі, веденого шківаса пасової передачі, вала 1;

φ_1 – кутова швидкість вала 1;

u_n – передаточне число пасової передачі.

Кінетична енергія маси з моментом інерції I_2 :

$$\frac{I_2^* \varphi_1^2}{2} = \frac{(I_{z_1} + 0,5 I_{b_1}) \varphi_1^2}{2} + \frac{(I_{z_2} + 0,5 I'_{b_2}) \varphi_1^2}{2 u_{21}^2},$$

звідки:

$$I_2 = 0,5 I_{b_1} + I_{z_1} + \frac{I_{z_2} + 0,5 I'_{b_2}}{u_{21}^2},$$

де I_{z_1} , та I_{z_2} – відповідно моменту інерції зубчастих коліс z_1 та z_2 ;

I'_{b_2} – момент інерції ділянки вала II на проміжку між шестернями z_1 і z_2 з врахування проміжної шестерні між ними;

$u_{21} = -z_1 / z_2$ – передаточне відношення шестерень z_2 і z_1 .

Кінетична енергія маси з моментом інерції I_3 :

$$\frac{I_3^* \varphi_1^2}{2} = \frac{(I_{z_2} + I_{b_2} / 2 + I_{b_2}^n) \varphi_1^2}{2 u_{21}^2} + \frac{(I_{z_3} + I'_{b_3}) \varphi_1^2}{2 u_{21}^2 u_{32}^2}.$$

З цього виразу знаходимо момент інерції:

$$I_3^* = \frac{I_{z_2} + I_{b_2} + 0,5 I_{b_2}^n}{u_{21}^2} + \frac{I_{z_3} + I'_{b_3}}{u_{21}^2 u_{32}^2},$$

де I_{z_2} , та I_{z_3} – відповідно моменту інерції шестерень;

$I_{b_2}^n$ – момент інерції ділянки вала II між шестернею та лінією опору з врахуванням маси проміжної шестерні;

I'_{b_3} – момент інерції частини вала III, що лежить між лівою опорою та серединою проміжку між шестернями z_3 та z_3' . $u_{32} = -z_3 / z_2'$ – передаточне відношення між шестернями z_3 та z_2' .

Кінетична енергія маси з моментом інерції I_4 .

$$\frac{I_4^* \varphi_1^2}{2} = \frac{(I_{z_3'} + I_{b_3}^n) \varphi_1^2}{u_{21}^2 u_{32}^2} + \frac{(I_{z_4} + I'_{b_4}) \varphi_1^2}{2 u_{42}^2 u_{32}^2 u_{12}^2},$$

відповідно:

$$I_4^* = \frac{I_{z_3'} + I_{b_3}^n}{u_{21}^2 u_{32}^2} + \frac{I_{z_4} + I'_{b_4}}{u_{21}^2 u_{32}^2 u_{43}^2},$$

де $I_{z_3'}$, та I_{z_4} – відповідно моменти інерції зубчастих коліс z_3 ;

$I_{b_3}^n$ – момент інерції вала III на ділянці від правої опори до середини проміжку між шестернями z_3' та z_3 ; I'_{b_4} – момент інерції вала IV на проміжку від лівої опори до середини проміжку між шестернею z_4 та планшайбою 3; $u_{43} = -z_4 / z_3'$ – передаточне відношення між шестернями z_3' та z_4 .

Аналогічно знаходимо момент інерції I_5 :

$$\frac{I_5^* \varphi_1^2}{2} = \frac{(I_{b_4}'' + I_{nu}) \varphi_1^2}{2u_{21}^2 u_{32}^2 u_{43}^2},$$

звідки:

$$I_5^* = \frac{I_{b_4}'' + I_{nu}}{u_{21}^2 u_{32}^2 u_{43}^2},$$

де I_{b_4}'' та I_{nu} – відповідно момент інерції проміжку вала IV між шестернею і планшайбою z_4 та момент інерції планшайби 3 з деталлю 4.

У випадку спрощеної динамічної моделі (рис. 6) момент інерції I_1 визначається за формулою 1, а момент інерції зведеної маси I_2^* визначається по наведеній вище методиці і описується виразом:

$$I_2^* = 0,5I_{b_1} + I_{u_1} + \frac{I_{b_2}}{u_{21}^2} + \frac{I_{b_3}}{u_{21}^2 u_{32}^2} + \frac{I_{b_4} + I_{nu}}{u_{21}^2 u_{32}^2 u_{43}^2}$$

де $I_{b_2}, I_{b_3}, I_{b_4}$ – відповідно моменти інерції валів II, III, IV разом із посадженими на них шестернями.

4. Зведення крутильних жорсткостей

Зведена жорсткість в крутильних коливальних системах визначається як відношення зведеного моменту сил до зведеного кута закручування умовного валопроводу

Покажемо, як визначається зведені жорсткості для елементів умовного валопроводу динамічної моделі крутильних коливальних, зображеної на рис. 5 і еквівалентній системі приводу, зображеної на рис. 4. За ланку зведення приймаємо вал I, а витратами на тертя в зубчастих парах, підшипниках та валах знехтуємо.

Зведена крутильна жорсткість участка умовного валопроводу, що знаходиться між масами I_1 та I_2 буде дорівнювати жорсткості вала I, тобто $C_{\varphi_1}^*$ та C_{φ_1} . Індекс * далі означає, що ним позначена саме зведена жорсткість. Зведена жорсткість вала II на проміжку між шестернями z_2 і z_2' (рис. 4), або жорсткість умовного валопроводу, що розміщений між масами I_2 та I_3 .

$$C_{\varphi_2}^* = C_{21} = \frac{M_{21}}{\varphi_{21}},$$

де M_{21} – зведений до валу I момент, діючий на валу II;

φ_{21} – зведений до валу I кут закручування вала II.

Якщо позначити через M_2 обертовий момент, прикладений до валу II, а через φ_2 – викликаний цим моментом кут закручування вала, то:

$$M_2 = C_2 \varphi_2,$$

де C_2 – крутильна жорсткість вала II на ділянці між шестернями z_1 і z_2' (рис. 4) неважко показати, що $\varphi_{21} = \varphi_2 u_{21}$, а $M_{21} = \frac{M_2}{u_{21}}$, де u_{21} – передаточне відношення від шестерні z_2 до шестерні z_1 .

Підставляючи ці співвідношення у формулу для розрахунку $C_{\varphi_2}^*$, отримаємо:

$$C_{\varphi_2}^* = \frac{C_2}{u_{21}^2}.$$

Зведена до валу I жорсткість вала III на проміжку між шестернями z_3 і z_2' , що відповідає жорсткості ділянки умовного валопроводу (рис. 5), розміщені між масами I_3 та I_4 , визначають із співвідношення:

$$C_{\varphi_3}^* = C_{31} = \frac{M_{31}}{\Phi_{31}},$$

де $M_{31} = \frac{M_3}{u_{21}u_{32}}$ – зведений до валу I момент, діючий на валу III;

$\Phi_{31} = \Phi_3 u_{21} u_{32}$ – зведений кут закручування цього вала. Оскільки моменту на валу III $M_3 = C_{\varphi_3} \Phi_3$, де C_{φ_3} – крутильна жорсткість вала III, а Φ_3 – його кут закручування, то виходячи з виразу $C_{\varphi_3}^*$, отримаємо що:

$$C_{\varphi_3}^* = \frac{C_3}{u_{21}^2 u_{32}^2},$$

де u_{43} – передаточне відношення від шестерні z_4 до шестерні z_3 .

C_3 – крутильна жорсткість вала на вказаному вище проміжку.

Аналогічним чином визначаємо зведену до валу I крутильну жорсткість вала IV на проміжку між шестернею z_4 та планшайбою (рис. 4), що відповідає жорсткості умовного валопроводу на ділянці між масами I_4 та I_5 (рис. 5):

$$C_{\varphi_4}^* = \frac{C_4}{u_{21}^2 u_{32}^2 u_{43}^2},$$

де u_{43} – передаточне відношення від шестерні z_4 до шестерні z_3 ;

C_4 – крутильна жорсткість вала на вказаному вище проміжку.

У випадку спрощеної двох масової крутильної динамічної моделі приводу (рис. 6) зведена до валу I крутильна жорсткість умовного валопроводу C_{φ}^* буде враховувати жорсткість всіх пружних елементів, розміщених між масами I_1 та I_5 (рис. 6). При її визначенні виходимо з того, що зведена податливість умовного валопроводу буде дорівнювати сумі податливостей його елементів, а саме:

$$\frac{1}{C_{\varphi}} = \frac{1}{C_{\varphi_1}^*} + \frac{1}{C_{\varphi_2}^*} + \frac{1}{C_{\varphi_3}^*} + \frac{1}{C_{\varphi_4}^*}$$

Підставляючи у формулу для C_{φ}^* наведені вище вирази для крутильних жорсткостей окремих ділянок умовного валопроводу (рис. 5) одержимо, що:

$$C_{\varphi}^* = \frac{C_{\varphi_1}^* C_{\varphi_2}^* C_{\varphi_3}^* C_{\varphi_4}^*}{C_{\varphi_2}^* C_{\varphi_3}^* C_{\varphi_4}^* + u_{21}^2 C_{\varphi_1}^* C_{\varphi_3}^* C_{\varphi_4}^* + u_{21}^2 u_{32}^2 C_{\varphi_1}^* C_{\varphi_2}^* C_{\varphi_4}^* + u_{21}^2 u_{32}^2 u_{34}^2 C_{\varphi_1}^* C_{\varphi_2}^* C_{\varphi_3}^*}$$

Висновки

1. Розглянуті загальні підходи і принципи до визначення структурних елементів розрахункових моделей механічних коливальних систем і їх побудови.
2. На двох прикладах складних механічних коливальних систем ілюструється процес послідовного переходу від складних до простих коливальних систем.
3. Подані аналітичні залежності для розрахунку зведених мас та зведених жорсткостей в крутильних коливальних системах.

Література

1. Ротенберг Р. В. Подвеска автомобиля // Изд. 3-е, переработ. и доп. М.: «Машиностроение». – 1972. – С. 392.
2. Кучер А. М. Металлорежущие станки (альбом общих видов, кинематических схем и узлов) / Кучер А. М., Киватицкий М. М., Покровский А. А. // Изд-во «Машиностроение». – 1972. – С. 308.
3. Комаров М. С. Динамика механизмов и машин. – М.: «Машиностроение», 1972, – С. 296.

Поступила в редакцію 18.12.2017

Kostogruz S.G., Misliborskij V.V.. **Mechanical modeling oscillating systems.**

The paper considers general approaches and principles of constructing calculation models of mechanical vibrational systems, as well as a method for their simplification and determination of consolidated masses and torsional stiffnesses.

Key words: oscillatory parameters of the object, factors, excitatory oscillations, structural elements of the system, elastic and inelastic ties, dynamic model of the mechanical system, simplified model of the oscillatory system.

References

1. Rothenberg R.V. Suspension of the car. Izd. 3rd, rework. and add M., "Mechanical Engineering", 1972, p. 392.
2. Kucher A.M. Metal-working machines (an album of common types, kinematic schemes and nodes). A. Kucher, M. M. Kiviatsky, A. Pokrovsky. Publishing house "Mechanical Engineering", 1972, C 308.
3. Komarov M.S. Dynamics of Mechanisms and Machines., M., "Mechanical Engineering", 1972, p. 296.