

Діхтярук М.М.,
Куріненко О.В.

Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна
E-mail: mega-dihtyaruk@ukr.net

ПІДСИЛЕНА ПРУЖНА СМУГА З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПІД ДІЄЮ ВЕРТИКАЛЬНОЇ СИЛИ

УДК 539.3

В рамках лінеаризованої теорії пружності розглядається плоска контактна задача про взаємодію пружної смуги з початковими напруженнями із пружною накладкою, яка знаходиться під дією вертикальних сил. Встановлено вплив початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль вздовж лінії контакту. Проведено обчислення і побудовано графіки для потенціалів найпростішої структури: гармонійного, Бартенева - Хазановича і Трелоара.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактні задачі, інтегральні перетворення Фур'є.

Вступ

Початкові або залишкові напруження практично завжди мають місце у всіх реальних конструкціях і деталях машин. Причини їх виникнення різні. Найчастіше початкові напруження в деталях і конструкціях створюються спеціально при їх виготовленні або у роботі. Також вони можуть з'являтися в процесі експлуатації, як під впливом механічних чинників, так і як незворотні пластичні деформації. Оскільки такі деталі часто є відповідальними елементами конструкцій, чие руйнування може призвести до катастрофічних наслідків, необхідна їх регулярна діагностика, а також їх підсилення підкріплюючими елементами. Характерна особливість таких завдань – це те, що в математичному плані вони в основному є задачами зі змішаними граничними умовами (контактними задачами) для стисливих і нестисливих тіл при однорідних початкових станах і, як правило, зводяться до розв'язання інтегральних рівнянь. В площині лінеаризованої теорії пружності викладається постановка і розв'язок задачі про контактну взаємодію пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями з скінченною накладкою (стрингером), в випадку дії на неї вертикальної зосередженої сили (аналог задачі Герсеванова - Мачерета).

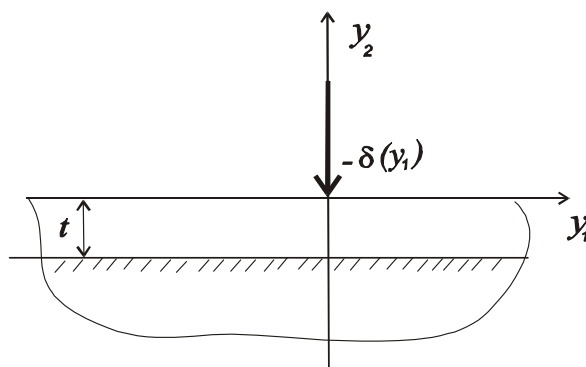


Рис. 1 – Контактна взаємодія попередньо напруженої смуги з стрингером під дією вертикальної сили

Всі дослідження виконані у розрізі стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури в загальному вигляді для теорії великих (кінечних) початкових деформацій. Щоб виконати перехід до різних варіантів теорії малих початкових деформацій вводиться спрощення, зазначене в [1].

Мета і постановка задачі

Метою даної роботи є розширення класу контактних задач, до яких можна використовувати лінеаризовану теорію пружності, а також продовження дослідження впливу початкових (залишкових) напружень на розподіл контактних зусиль по лінії контакту попередньо напруженої пружної смуги з пружною накладкою, яка знаходиться під дією вертикальної сили. У випадку деяких пружних потенціалів найпростішої структури провести чисельні розрахунки і побудувати графіки.

Виклад матеріалів досліджень

Граничні умови і вихідні співвідношення

Нехай на нескінчену пружну накладку, що підкріплює пружну смугу з початковими (залишковими) напруженнями, діє вертикальна зосереджена сила $P_0(y_1) = P\delta(y_1)$. Приймаючи у формулах [2, 3] $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ та зробивши необхідні перетворення, одержимо закон розподілу компоненти вектора переміщення і тензора деформацій для рівних та нерівних коренів визначального рівняння [1]. Це, по суті, є розв'язком контактної задачі про згин, зосереджений силою P нескінченної пружної балки на пружній, защемленій на одній грані смугі (аналог задачі Герсеванова - Мачерета) [4], з початковими (залишковими) напруженнями. Після ряду перетворень [2, 3] одержимо наступні вирази для компонент вектора переміщень і тензора деформацій:

Для рівних коренів $n_1 = n_2 \left(\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \right)$:

$$u_1(y_1, z_j) = \frac{i}{2c_{44}(1+m_1)l_1\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^{-1} \left[\left((s_0 + s_1 - 1)sh^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - \varphi_1^2 \right) ch\alpha z_1 + (s_1 ch^2 \times \right. \\ \left. \times \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - s_0 - sh^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) (\alpha z_1) ch\alpha z_1 + \alpha z_1 \left(s_0 \left(\bar{s}_1 \zeta(\alpha) - \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) + \right. \\ \left. + \left(\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - \bar{s}_1 \zeta(\alpha) \right) \right] \frac{sh\alpha z_1}{\alpha z_1} + \left(-\bar{s}_1 \zeta(\alpha) + \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) ch\alpha z_1 \right] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha) \cdot e^{-i\alpha y_1} d\alpha. \quad (1)$$

$$u_2(y_1, z_1) = -\frac{m_1}{2\pi\sqrt{n_1}c_{44}(1+m_1)l_1} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^{-1} \left[\left(\bar{s}_1 \zeta - \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) (\xi_1 - \xi_3) \right] ch\alpha z_1 + \\ + n_0 \left[\left(\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - \bar{s}_1 \zeta \right) \cdot (\alpha z_1) sh\alpha z_1 + \alpha z_1 n_0 \left(\xi_1(\alpha) \frac{sh\alpha z_1}{\alpha z_1} \left(s_1 ch^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - s_0 - sh^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) ch\alpha z_1 \right] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha) \cdot e^{-i\alpha y_1} d\alpha. \quad (2)$$

$$Q_{22}(y_1, z_1) = \frac{c_{44}(1+m_1)l_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[n_0 \xi_1(\alpha) ch\alpha z_1 + n_0 \left(s_1 ch^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - s_0 - \right. \right. \\ \left. \left. - sh^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) (\alpha z_1) sh\alpha z_1 + \alpha z_1 \left[\left(\bar{s}_1 \zeta - \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) (\xi_1 - \xi_6) \right] \frac{sh\alpha z_1}{\alpha z_1} + \right. \\ \left. + n_0 \left(-\bar{s}_1 \zeta + \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) ch\alpha z_1 \right] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha) \cdot e^{-i\alpha y_1} d\alpha. \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
Q_{21}(y_1, z_1) = & \frac{-i c_{44}(1+m_1)}{2\pi\sqrt{n_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[\left(n_0 \left(-\bar{s}_1 \zeta + \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) \right) (\alpha z_1) sh \alpha z_1 + \alpha z_1 (n_0 ((s_0 - s_1) \times \right. \\
& \times ch^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) + s_1 \bar{s}_0 sh^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - \left. \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) + \xi_1 \left(s_1 ch^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - s_0 - sh^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) \times \\
& \left. \times \frac{sh \alpha z_1}{\alpha z_1} + n_0 \left(s_1 ch^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - s_0 - sh^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) ch \alpha z_1 \right] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha) \cdot e^{-i\alpha y_1} d\alpha. \quad (4)
\end{aligned}$$

Для нерівних коренів $n_1 \neq n_2$ ($\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$):

$$\begin{aligned}
u_1(y_1, z_1) = & -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_0 \left[\left(-s_1 ch \left(2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_2}} \right) \right) + s_0 \zeta_1 - s_1 s_0 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_4 \right) ch \alpha z_1 + \left(s_0 \phi_1^2 sh^2 \times \right. \right. \\
& \times \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - s_0 ch^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) + s_1 \zeta_1 + \left. \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_4 \right) ch \alpha z_2 + \alpha z_1 ((s_0 s_1 \zeta_3 - s_0 \times \\
& \times \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_2) sh \alpha z_1 + \left. \left(\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_2 - s_1 \zeta_3 \right) \frac{sh \alpha z_2}{\alpha z_1} \right] \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha) \cdot e^{-i\alpha y_1} d\alpha. \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(y_1, z_1) = & \frac{m_1}{2\pi\sqrt{n_1}} \int_{-\infty}^{\infty} n_0 \left[\left(s_0 s_1 \zeta_3 - s_0 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_2 \right) ch \alpha z_1 + \left(\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_2 - s_1 \zeta_3 \right) \times \right. \\
& \times s_1 ch \alpha z_2 + \alpha z_1 \left[\left(-s_1 ch \left(2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \right) + s_0 \zeta_1 - s_1 s_0 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_4 \right) sh \alpha z_1 + \left(s_0 \phi_1^2 sh^2 \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) + s_1 \zeta_1 + \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_4 \right) \cdot s \frac{sh \alpha z_2}{\alpha z_1} \right] \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha) \cdot e^{-i\alpha y_1} d\alpha. \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{22}(y_1, z_1) = & \frac{c_{44}(1+m_1)l_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha n_0 \left[\left(-s_1 ch \left(2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_2}} \right) \right) + s_0 \zeta_1 - s_1 s_0 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_4 \right) ch \alpha z_1 + \right. \\
& + \left(s_0 \phi_1^2 sh^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - s_0 ch^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) + s_1 \zeta_1 + \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_4 \right) \cdot s ch \alpha z_2 + \alpha z_1 ((s_0 s_1 \zeta_3 - \\
& - s_0 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_2) sh \alpha z_1 + \left. \left(\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_2 - s_1 \zeta_3 \right) \cdot s \frac{sh \alpha z_2}{\alpha z_1} \right] \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha) \cdot e^{-i\alpha y_1} d\alpha. \quad (7)
\end{aligned}$$

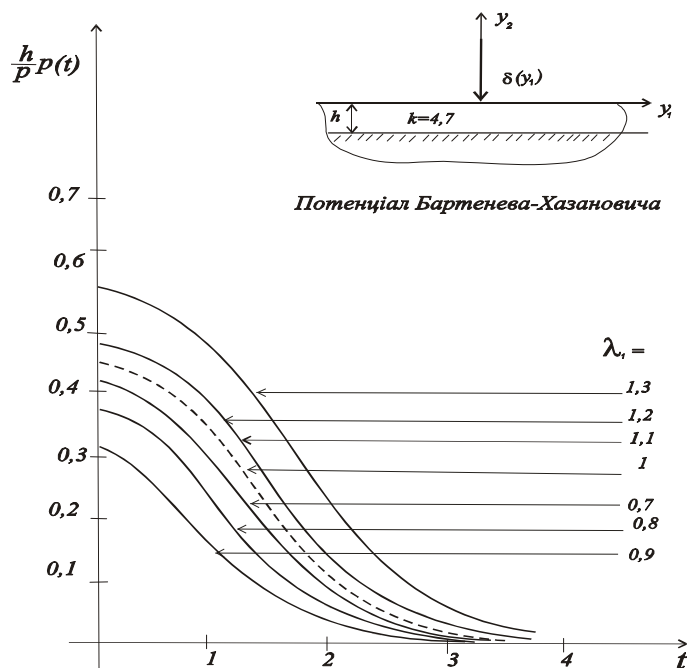


Рис. 2 – Контактна взаємодія під дією вертикальної сили у випадку потенціалу Бартенева-Хазановича

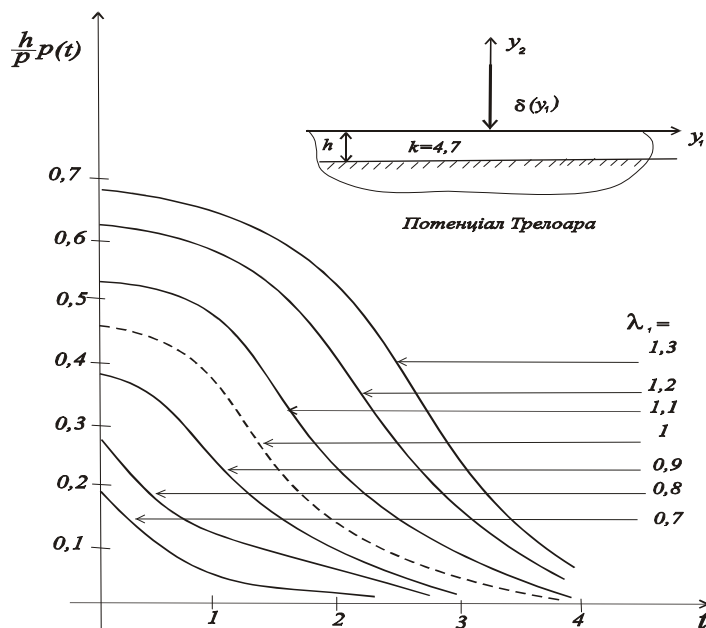


Рис. 3 – Контактна взаємодія під дією вертикальної сили у випадку потенціалу Трелоара

$$Q_{21}(y_1, z_1) = \frac{-1}{2\pi} \frac{c_{44}(1+m_1)}{n_1} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha n_0 \left[\left(s_0 s_1 \zeta_3 - s_0 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_2 \right) ch \alpha z_1 + \left(\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_2 - s_1 \zeta_3 \right) \times \right. \\ \left. \times s_0 ch \alpha z_2 + \alpha z_1 \left(\left(-s_2 ch \left(2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_2}} \right) \right) + s_0 \zeta_1 - s_1 s_0 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_4 \right) sh \alpha z_1 + s_0 \varphi_1^2 sh^2 \times \right. \right.$$

$$\times \left[\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) - s_0 c h^2 \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) + s_1 \zeta_1 + \left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}} \right) \zeta_4 \right] s_0 \frac{sh \alpha z_2}{\alpha z_1} \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha) \cdot e^{-i\alpha y_1} d\alpha. \quad (8)$$

Для конкретних пружних потенціалів: Бартенева – Хазановича і Трелоара згідно формул [2, 3] проведено розрахунки і побудовано графіки (рис. 2 і рис. 3).

Тут $\frac{h}{P} q(t)$ – безрозмірні контактні тангенціальні напруження.

Значення:

$\lambda_1 = 1$ (на графіках пунктирна лінія) – відповідають класичній теорії пружності співпадає з результатами роботи [4];

$\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9$ – відповідають початковим напруженням стиску;

$\lambda_1 = 1,1; 1,2; 1,3$ – відповідають початковим напруженням розтягу;

t – безрозмірна координата початкового напруженого стану в пружних смугах з початковими напруженнями.

Висновки

Дослідження, які розкриває стаття, дають можливість узагальнити висновки щодо впливу початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль під нескінченним стрингером.

1. Зокрема, беручи до уваги загальний випадок при рівних і нерівних коренях визначального рівняння [1] при розгляді класу задач саме в рамках лінеаризованої теорії пружності, запропоновано загальний метод їхнього розв'язування. Це дає можливість отримати розв'язок поставлених задач при умові, що відомий розв'язок аналогічних лінійних (без початкових напружень) задач.

2. Контактні напруження по лінії контакту з стрингером суттєво залежать від початкових напружень. У порівнянні з більш жорсткими матеріалами, саме у високо еластичних матеріалах проявляється більш суттєвий вплив кількісного характеру початкових напружень.

3. При наближенні початкових напружень до значення, що відповідає поверхневій нестійкості, виникають явища «резонансного» характеру, які полягають в тому, що напруження і переміщення в області контакту різко змінюють свої величини, а пружні смуги з початковими напруженнями перебувають в стані нейтральної рівноваги.

Література

1. Гузь А.Н. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницький / Вища школа. – К., 1995. – 305 с.
2. Дихтярук Н.Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками / Н.Н. Дихтярук // Прикл. механика. – 2004. – № 3. – С. 63 – 70.
3. Рудницький В.Б. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками / В.Б. Рудницький, Н.Н. Дихтярук // Прикладная механика. – 2002. – № 11. – С. 81 - 88.
4. Герсеванов И.М. К вопросу о бесконечно длинной балке на упругой почве, нагруженной силой / И.М. Герсеванов, Я.А. Мачерет // Гидротехническое строительство. – 1935. – № 10. – С. 15 – 23.

Надійшла в редакцію 31.05.2018

Dihtiaruk N.N., Kurinienko O.V. Inflammatory influenza influenced because of a vertical force.

In the plane of the linearized theory of elasticity, a plane contact problem is considered about the interaction of an elastic band with initial stresses with an elastic overlay, which is under the action of vertical forces. The influence of initial stresses on the law of distribution of contact forces along the contact line is established. The calculations and graphs for the potentials of the simplest structure: harmonic, Bartenev-Khazanovich and Treloara were constructed.

The main question is confined in founding out of influence of initial stresses in the band of the law distribution of vertical reactions of interaction between the band with initial stresses and stringers that reinforce the last. Based on the assumption that the stringers are loaded at the same time vertical forces, a fair model of the bending beam in combination with horizontal tension rod, the problem is formulated mathematically as a system of integro-differential equations relative to the unknown contact stresses. Using Fourier transforms, the system is solved inclosed form. Expressions of the stresses are represented by Fourier integrals rather simple structure. The influence of initial stresses on the distribution of the contact stresses and the identified effects of concentrated loads. Stresses in the band are not researching but the formulas that are needed for this are received naturally during problem is standed: received main singular integro-differential equations and on it base formulated general method of considered class of problems solution. Under studied investigations engineering recommendations for constructors are formulated.

Key words: linear elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problems, integral Fourier transformations.

Refereces

1. Kontaktna vzayemodiya til z pochatkovimi napruzhennyami. A.N. Guz, S.Yu. Babich, V.B. Rudnickij. Visha shkola. K., 1995. 305 s.
2. O ravnovesii polosy s nachalnymi napryazheniyami, usilennoj uprugimi nakladkami. N.N. Dihtyaruk. Prikl. mehanika. 2004. № 3. S. 63 – 70.
3. Uprugaya polosa s nachalnymi napryazheniyami, usilennaya uprugimi nakladkami. V.B. Rudnickij, N.N. Dihtyaruk. Prikladnaya mehanika. 2002. № 11. S. 81 – 88.
4. K voprosu o beskonechno dlinnoj balke na uprugoj pochve, nagruzhenoj siloj. I.M. Gersevanov, Ya.A. Macheret. Gidrotehnicheskoe stroitelstvo. 1935. № 10. S. 15 – 23.